ПРОСТЫЕ УРАВНЕНИЯ

учебное пособие для школьников и поступающих в вузы

Автор
Трепачёв Дмитрий

2025 год, v1.0.0

Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Почему именно простые уравнения? Потому что умение решать уравнения — это фундамент, на котором строится всё остальное. Линейные уравнения, квадратные, уравнения со степенями — без уверенного владения этими темами невозможно двигаться дальше в алгебре.

В школьных учебниках, конечно, всё это есть. Но беда в том, что разные типы уравнений раскиданы по разным классам и главам. Одни проходят в шестом классе, другие в седьмом, третьи в восьмом. А когда начинается подготовка к экзаменам, ученику приходится собирать эту мозаику по кусочкам. Да и задач в учебниках часто маловато — особенно на отработку каждого типа отдельно.

В этой книге я собрал все основные виды простых уравнений в одном месте:

- линейные уравнения: $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$;
- уравнения со скобками и приведением подобных;
- уравнения с дробными коэффициентами;
- уравнения со степенями: $x^2 = a$, $x^3 = a$, $x^n = a$;
- уравнения, где произведение равно нулю;
- неполные квадратные уравнения;
- уравнения со скобкой в квадрате;
- полные квадратные уравнения (дискриминант, формула для чётного коэффициента);
- теорема Виета для приведённых и неприведённых уравнений;
- биквадратные уравнения.

Каждому виду посвящена отдельная глава с теорией, примерами и большим количеством задач. Все примеры подробно разобраны, чтобы было понятно, какой способ применять и почему. А в конце есть глава с перемешанными задачами — чтобы научиться определять тип уравнения и выбирать правильный метод решения.

Эта книга пригодится не только моим ученикам, но и всем, кто хочет разобраться в теме самостоятельно. А ещё я буду рад, если другие репетиторы станут использовать её на своих занятиях — берите свободно, пользуйтесь, задавайте побольше примеров своим ученикам.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть и другие пособия по математике и физике — всё, что я наработал за годы преподавания, а также научно-популярные книги, написанные мною для тех учеников, которые хотят знать больше про историю науки и окружающий мир.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если вам или вашему ребёнку нужна помощь — милости прошу!

Удачи в изучении математики!

Дмитрий Трепачёв

Оглавление

1 Уравнения вида $x + a = b$ **8**

1.1 Теория 8

Пример 1. Переносим слагаемое 8

Пример 2. Переносим число с минусом 8

Пример 3. Когда переносить нужно известное число 8

Пример 4. Числа побольше . . . 9
Пример 5. С отрицательными числами . . . 9
Пример 6. Когда x стоит справа . . . 9
Пример 7. Ещё пример с x справа . . . 9
Пример 8. Внимание со знаком минус . . . 9
Пример 9. Другой способ решения . . . 10
Пример 10. Когда неизвестное стоит с минусом . . . 10
1.2 Задачи . . . 10

2 Уравнения вида $ax = b$ **12**
2.1 Теория . . . 12
Пример 1. Переносим множитель . . . 12
Пример 2. Когда ответ — дробь . . . 12
Пример 3. Ещё один пример с дробным ответом . . . 12
Пример 4. Дробь, которую можно сократить . . . 12
Пример 5. Когда x стоит справа . . . 13
Пример 6. Отрицательный множитель . . . 13
Пример 7. Когда ответ — отрицательная дробь . . . 13
Пример 8. Ещё пример с отрицательной дробью . . . 13
Пример 9. Множитель — буква . . . 13
2.2 Задачи . . . 13

3 Уравнения вида $ax + b = c$ **16**
3.1 Теория . . . 16
Пример 1. Два шага . . . 16
Пример 2. Когда b отрицательное . . . 16
Пример 3. Когда ответ — дробь . . . 16
Пример 4. Ещё один пример с дробным ответом . . . 17
Пример 5. Когда c меньше b . . . 17
Пример 6. Когда x стоит справа . . . 17
Пример 7. Когда и b, и c отрицательные . . . 17
Пример 8. Когда a отрицательное . . . 18
Пример 9. Когда после переноса получается дробь с минусом . . . 18
Пример 10. Коэффициенты — буквы . . . 18
3.2 Задачи . . . 18

4 Уравнения со скобками и приведением подобных **20**
4.1 Теория . . . 20
Пример 1. Раскрываем одну скобку . . . 20
Пример 2. Скобка с вычитанием . . . 20
Пример 3. Когда перед скобкой минус . . . 21
Пример 4. Собираем неизвестные в одной части . . . 21
Пример 5. Несколько скобок . . . 21
Пример 6. Когда после раскрытия получается дробь . . . 21
Пример 7. Когда в скобках x с коэффициентом . . . 22
Пример 8. Длинное уравнение с несколькими шагами . . . 22
4.2 Задачи . . . 22

5 Уравнения вида $\frac{a}{b}x = c$ **25**
5.1 Теория . . . 25
Пример 1. Дробь с числителем 1 . . . 25
Пример 2. Обыкновенная дробь . . . 25
Пример 3. Когда в числителе не 1 . . . 25
Пример 4. Когда ответ — дробь . . . 26
Пример 5. Когда c — дробь . . . 26

Пример 6. Когда x справа . . . 26
Пример 7. Дробь с минусом . . . 26
Пример 8. Когда в ответе отрицательная дробь . . . 26
Пример 9. Дробь можно сократить . . . 27
Пример 10. Когда a и b — буквы . . . 27
5.2 Задачи . . . 27

6 Уравнения вида $ax = \frac{b}{c}$ **29**
6.1 Теория . . . 29
Пример 1. Правая часть — простая дробь . . . 29
Пример 2. Когда числитель дроби — число . . . 29
Пример 3. Когда можно сократить . . . 29
Пример 4. Ещё один пример с сокращением . . . 30
Пример 5. Когда правая часть — целое число, записанное как дробь . . . 30
Пример 6. Когда x справа . . . 30
Пример 7. Отрицательная правая часть . . . 30
Пример 8. Отрицательный множитель . . . 30
Пример 9. Когда и множитель, и дробь отрицательные . . . 30
Пример 10. Когда a, b, c — буквы . . . 31
6.2 Задачи . . . 31

7 Уравнения вида $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$ **33**
7.1 Теория . . . 33
Пример 1. Умножение на перевёрнутую дробь . . . 33
Пример 2. Метод крест-накрест . . . 33
Пример 3. Умножение на общий знаменатель . . . 34
Пример 4. Когда удобно сократить . . . 34
Пример 5. Когда в знаменателях большие числа . . . 34
Пример 6. Когда можно сократить крест-накрест . . . 35
Пример 7. Когда x справа . . . 35
Пример 8. Отрицательные числа . . . 35
Пример 9. Отрицательные с обеих сторон . . . 36
Пример 10. Когда a, b, c, d — буквы . . . 36
7.2 Задачи . . . 36

8 Уравнения вида $x^2 = a$ **38**
8.1 Теория . . . 38
Пример 1. Когда a — полный квадрат . . . 38
Пример 2. Когда a — не полный квадрат . . . 38
Пример 3. Когда $a = 0$ . . . 38
Пример 4. Когда a отрицательное . . . 39
Пример 5. Когда перед x^2 стоит коэффициент . . . 39
Пример 6. Ещё пример с коэффициентом . . . 39
Пример 7. Когда в правой части дробь . . . 39
Пример 8. Когда дробь не извлекается . . . 39
Пример 9. Когда нужно перенести слагаемое . . . 39
Пример 10. Ещё пример с переносом . . . 40
Пример 11. Когда после переноса получается отрицательное число . . . 40
Пример 12. Когда x в квадрате стоит в скобках . . . 40
Пример 13. Ещё пример со скобкой . . . 40
8.2 Задачи . . . 40

9 Уравнения вида $x^3 = a$ **43**
9.1 Теория . . . 43

Пример 1. Когда a — куб целого числа . . . 43
Пример 2. Ещё пример с кубом целого числа . . . 43
Пример 3. Когда a отрицательное . . . 43
Пример 4. Ещё пример с отрицательным a . . . 43
Пример 5. Когда a — не полный куб . . . 44
Пример 6. Ещё пример с неполным кубом . . . 44
Пример 7. Когда перед x^3 стоит коэффициент . . . 44
Пример 8. Ещё пример с коэффициентом . . . 44
Пример 9. Когда коэффициент и ответ — дробь . . . 44
Пример 10. Когда в правой части дробь . . . 45
Пример 11. Когда дробь не извлекается . . . 45
Пример 12. Когда нужно перенести слагаемое . . . 45
Пример 13. Ещё пример с переносом . . . 45
Пример 14. Когда x в кубе стоит в скобках . . . 45
Пример 15. Ещё пример со скобкой . . . 46
Пример 16. Скобка с отрицательным числом . . . 46
9.2 Задачи . . . 46

10 Уравнения вида $x^n = a$ **48**
10.1 Теория . . . 48
Пример 1. Нечётная степень, $a > 0$ . . . 48
Пример 2. Нечётная степень, $a < 0$ . . . 48
Пример 3. Чётная степень, $a > 0$ . . . 48
Пример 4. Чётная степень, $a < 0$ . . . 49
Пример 5. Чётная степень, $a = 0$ . . . 49
Пример 6. Нечётная степень, a не является полной степенью . . . 49
Пример 7. Чётная степень, a не является полной степенью . . . 49
Пример 8. Число в правой части записано как степень . . . 49
Пример 9. Чётная степень, число записано как степень . . . 49
Пример 10. Отрицательное число в степени . . . 50
Пример 11. Когда перед x^n стоит коэффициент . . . 50
Пример 12. Ещё пример с коэффициентом . . . 50
Пример 13. Когда нужно перенести слагаемое . . . 50
Пример 14. Ещё пример с переносом . . . 50
Пример 15. Дробь в правой части . . . 51
Пример 16. Дробь с неполными степенями . . . 51
Пример 17. Дробь, записанная через степени . . . 51
Пример 18. Сложный случай с коэффициентом и степенью . . . 51
10.2 Задачи . . . 51

11 Произведение равно нулю **53**
11.1 Теория . . . 53
Пример 1. Простейший случай . . . 53
Пример 2. С минусом . . . 53
Пример 3. Когда коэффициент при x^2 не равен 1 . . . 53
Пример 4. Ещё пример с коэффициентом . . . 54
Пример 5. Когда числа не делятся нацело . . . 54
Пример 6. Когда нужно сначала перенести . . . 54
Пример 7. Ещё пример с переносом . . . 54
Пример 8. Когда после переноса получаются дробные коэффициенты . . . 55
Пример 9. Когда в уравнении только два слагаемых с x . . . 55
Пример 10. Когда общий множитель — только x без числа . . . 55
Пример 11. Когда после вынесения получается скобка с минусом . . . 55
Пример 12. Сложный случай с дробями . . . 56

11.2 Задачи . . . 56

12 Неполные квадратные **58**
12.1 Теория . . . 58
Пример 1. Простейший случай . . . 58
Пример 2. С плюсом в скобке . . . 58
Пример 3. Когда b не является полным квадратом . . . 59
Пример 4. Когда перед x в скобке есть коэффициент . . . 59
Пример 5. Ещё пример с коэффициентом . . . 59
Пример 6. Когда b — дробь . . . 59
Пример 7. Когда b отрицательное . . . 60
Пример 8. Когда $b = 0$ . . . 60
Пример 9. Сложный случай с корнем . . . 60
Пример 10. Когда в скобке сумма с минусом . . . 60
Пример 11. Когда нужно сначала привести к виду $(\ldots)^2 = b$ . . . 61
Пример 12. Ещё пример с приведением . . . 61
12.2 Задачи . . . 61

13 Уравнения со скобкой в квадрате **64**
13.1 Теория . . . 64
Пример 1. $D > 0$, два корня . . . 64
Пример 2. Ещё пример с $D > 0$ . . . 64
Пример 3. $D = 0$, один корень . . . 65
Пример 4. Ещё пример с $D = 0$ . . . 65
Пример 5. $D < 0$, нет корней . . . 65
Пример 6. Ещё пример с $D < 0$ . . . 66
Пример 7. Когда дискриминант — полный квадрат . . . 66
Пример 8. Когда дискриминант — не полный квадрат . . . 66
Пример 9. Отрицательный дискриминант с дробями . . . 66
13.2 Задачи . . . 66

14 Дискриминант — общая формула **68**
14.1 Теория . . . 68
Пример 1. b чётное, $D_1 > 0$ . . . 68
Пример 2. Сравнение с обычной формулой . . . 69
Пример 3. Когда $a \neq 1$ . . . 69
Пример 4. $D_1 = 0$ . . . 69
Пример 5. $D_1 < 0$ . . . 69
Пример 6. b положительное чётное . . . 70
Пример 7. Когда корни иррациональные . . . 70
Пример 8. Когда a отрицательное . . . 70
Пример 9. Сравнение с обычной формулой для больших чисел . . . 71
14.2 Задачи . . . 71

15 Дискриминант — формула для чётного коэффициента **73**
15.1 Теория . . . 73
Пример 1. Оба корня положительные . . . 73
Пример 2. Корни разных знаков . . . 73
Пример 3. Оба корня отрицательные . . . 74
Пример 4. Один из корней равен 1 . . . 74
Пример 5. Корни — одинаковые числа . . . 74
Пример 6. Когда корни не подбираются . . . 74
Пример 7. Подбор с учётом знаков . . . 74
Пример 8. Когда q большое . . . 75
Пример 9. Когда q отрицательное и большое . . . 75

Пример 10. Когда корни — дроби . . . 75
15.2 Задачи . . . 75

16 Теорема Виета для приведённых уравнений **78**
16.1 Теория . . . 78
Пример 1. Простейший случай . . . 78
Пример 2. Корни разных знаков . . . 78
Пример 3. Оба корня отрицательные . . . 79
Пример 4. Оба корня положительные . . . 79
Пример 5. Когда корни — дроби, но подбираются . . . 79
Пример 6. Когда один корень — целый, другой — дробь . . . 80
Пример 7. Когда корни не подбираются . . . 80
Пример 8. Отрицательные коэффициенты . . . 80
Пример 9. Когда a, b, c имеют общий делитель . . . 80
16.2 Задачи . . . 81

17 Теорема Виета для неприведённых уравнений **83**
17.1 Теория . . . 83
Пример 1. Простейший случай . . . 83
Пример 2. Когда один из t отрицательный . . . 84
Пример 3. Когда один корень $t = 0$ . . . 84
Пример 4. Когда дискриминант равен нулю . . . 84
Пример 5. Когда первый коэффициент не равен 1 . . . 84
Пример 6. Когда уравнение неполное (нет bx^2) . . . 85
Пример 7. Другой способ — сразу как $x^4 = a$ . . . 85
Пример 8. Когда все t отрицательные . . . 85
Пример 9. Когда есть только чётные степени с коэффициентами . . . 85
Пример 10. Когда после замены получается один корень . . . 86
Пример 11. Когда нужно сначала привести к стандартному виду . . . 86
Пример 12. Ещё пример с приведением . . . 86
17.2 Задачи . . . 86

18 Биквадратные уравнения **89**
18.1 Теория . . . 89
18.2 Задачи . . . 89

19 Практика на все приёмы **92**

Уравнения вида $x + a = b$

Теория

В этой главе мы научимся решать самые простые уравнения — такие, где неизвестное число стоит вместе с известными, и всё соединено знаками сложения и вычитания. Пример уравнения, в котором a и b — известные числа, а x — неизвестное:

$$x + a = b$$

Чтобы решить уравнение такого вида, нам нужно использовать специальное правило переноса:

Если число или переменную перенести из одной части уравнения в другую, то знак перед ним меняется на противоположный.

Как это работает? Смотрите на примерах.

Пример 1

Переносим слагаемое

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x + 5 = 12$$

В левой части есть x и ещё число $+5$. Нам нужно оставить x в одиночестве. Перенесём число 5 в правую часть. При переносе знак меняется на противоположный: было $+5$, станет -5:

$$x = 12 - 5$$

Считаем: $x = 7$.

Проверяем: $7 + 5 = 12$. Всё верно.

Пример 2

Переносим число с минусом

Рассмотрим уравнение:

$$x - 3 = 8$$

Здесь x и число -3. Чтобы оставить x один, перенесём -3 в правую часть. При переносе знак меняется: было -3, станет $+3$:

$$x = 8 + 3$$

Получаем: $x = 11$.

Проверка: $11 - 3 = 8$.

Пример 3

Когда переносить нужно известное число

Разберём уравнение, где неизвестное стоит с минусом:

$$10 - x = 4$$

Здесь можно по-разному применять правило. Давайте перенесём число 10 в правую часть. При переносе $+10$ (а в уравнении оно именно с плюсом, потому что 10 — это $+10$) становится -10:

$$-x = 4 - 10$$

Считаем правую часть: $4 - 10 = -6$. Получили:

$$-x = -6$$

Теперь у нас слева $-x$, а справа -6. Чтобы найти x, перенесём знак минус (как будто переносим множитель -1). Но проще заметить: если $-x = -6$, то $x = 6$.

Проверка: $10 - 6 = 4$. Всё верно.

Пример 4

Числа побольше

Возьмём уравнение с числами побольше:

$$x + 23 = 51$$

Переносим +23 в правую часть со знаком минус:

$$x = 51 - 23$$

Получаем: $x = 28$.
Проверка: $28 + 23 = 51$.

Пример 5

С отрицательными числами

Теперь решим уравнение, в котором встречаются отрицательные числа:

$$x - (-5) = 7$$

Сначала заметим, что $x - (-5)$ — это $x + 5$. Перепишем уравнение:

$$x + 5 = 7$$

Теперь переносим +5 в правую часть:

$$x = 7 - 5$$

Получаем: $x = 2$.
Проверка: $2 - (-5) = 2 + 5 = 7$.

Пример 6

Когда x стоит справа

Бывает так, что неизвестное стоит в правой части уравнения. Например:

$$15 = x + 9$$

Переносить можно из любой части в любую. Перенесём +9 из правой части в левую. При переносе +9 становится −9:

$$15 - 9 = x$$

Считаем: $6 = x$, или $x = 6$.
Проверка: $6 + 9 = 15$.

Пример 7

Ещё пример с x справа

Рассмотрим ещё один случай, когда x справа:

$$24 = x - 7$$

Переносим −7 из правой части в левую. При переносе −7 становится +7:

$$24 + 7 = x$$

Получаем: $31 = x$, или $x = 31$.
Проверка: $31 - 7 = 24$.

Пример 8

Внимание со знаком минус

Решим уравнение, где нужно быть внимательным:

$$8 - x = -3$$

Перенесём число 8 в правую часть (оно с плюсом, становится -8):

$$-x = -3 - 8$$

Считаем: $-x = -11$
Значит, $x = 11$.
Проверка: $8 - 11 = -3$. Всё верно.

Пример 9

Другой способ решения

То же уравнение $8 - x = -3$ можно решить иначе — перенести $-x$ вправо, а -3 влево. Попробуем:
Переносим $-x$ в правую часть. При переносе $-x$ становится $+x$:

$$8 = -3 + x$$

Теперь переносим -3 в левую часть (становится $+3$):

$$8 + 3 = x$$

Получаем: $x = 11$.
Тот же ответ, но иногда такой порядок удобнее.

Пример 10

Когда неизвестное стоит с минусом

Рассмотрим уравнение:

$$-x + 7 = 12$$

Переносим $+7$ в правую часть:

$$-x = 12 - 7$$

Считаем: $-x = 5$
Значит, $x = -5$.
Проверка: $-(-5) + 7 = 5 + 7 = 12$. Всё верно.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x + 3 = 7$ **4)** $x + 4 = 10$ **7)** $x + 8 = 20$ **10)** $x + 15 = 30$

2) $x + 5 = 9$ **5)** $x + 7 = 15$ **8)** $x + 9 = 18$ **11)** $x + 20 = 35$

3) $x + 2 = 8$ **6)** $x + 6 = 14$ **9)** $x + 12 = 25$ **12)** $x + 25 = 40$

2. Решите уравнения:

1) $x - 2 = 5$ **4)** $x - 5 = 8$ **7)** $x - 8 = 15$ **10)** $x - 12 = 18$

2) $x - 3 = 6$ **5)** $x - 6 = 10$ **8)** $x - 9 = 14$ **11)** $x - 15 = 25$

3) $x - 4 = 7$ **6)** $x - 7 = 12$ **9)** $x - 10 = 20$ **12)** $x - 20 = 30$

3. Решите уравнения:

1) $7 - x = 3$ **4)** $12 - x = 5$ **7)** $20 - x = 11$ **10)** $40 - x = 22$

2) $9 - x = 4$ **5)** $15 - x = 8$ **8)** $25 - x = 13$ **11)** $50 - x = 31$

3) $10 - x = 6$ **6)** $18 - x = 9$ **9)** $30 - x = 14$ **12)** $100 - x = 67$

4. Решите уравнения:

1) $x+14=27$

4) $x+26=43$

7) $x+44=71$

10) $x+65=92$

2) $x-18=24$

5) $x-31=42$

8) $x-53=64$

11) $x-76=81$

3) $35-x=19$

6) $52-x=28$

9) $87-x=53$

12) $123-x=78$

5. Решите уравнения:

1) $x+(-3)=5$

4) $x+(-8)=-3$

7) $x+12=-5$

10) $x+(-10)=-15$

2) $x-(-4)=7$

5) $x-(-6)=-2$

8) $x-15=-8$

11) $x-(-12)=-6$

3) $-5-x=2$

6) $-9-x=-4$

9) $20-x=-7$

12) $-18-x=-10$

6. Решите уравнения:

1) $15=x+7$

4) $31=x+14$

7) $53=x+26$

10) $81=x+37$

2) $24=x-9$

5) $42=x-18$

8) $64=x-31$

11) $95=x-43$

3) $13=20-x$

6) $27=35-x$

9) $48=72-x$

12) $66=84-x$

Уравнения вида $ax = b$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, где неизвестное число умножается на известное. Пример такого уравнения, в котором a и b — известные числа, а x — неизвестное:

$$ax = b$$

Чтобы решить уравнение такого вида, нам нужно использовать специальное правило:

Если неизвестное умножается на число, то это число можно перенести в другую часть уравнения, записав его в знаменателе.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Переносим множитель

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$3x = 12$$

Здесь x умножается на 3. Чтобы найти x, перенесём множитель 3 в правую часть. Он окажется в знаменателе:

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

Пример 2

Когда ответ — дробь

Давайте рассмотрим уравнение, при решении которого получается дробь:

$$4x = 10$$

Переносим множитель 4 в правую часть:

$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Пример 3

Ещё один пример с дробным ответом

Возьмём уравнение, где ответ тоже будет дробью:

$$6x = 3$$

Переносим множитель 6:

$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Пример 4

Дробь, которую можно сократить

Рассмотрим уравнение, в котором полученную дробь можно сократить:

$$8x = 12$$

Переносим множитель 8:

$$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Пример 5

Когда x стоит справа

Бывает, что неизвестное стоит в правой части уравнения. Например:

$$15 = 5x$$

Перепишем уравнение так, чтобы x был слева: $5x = 15$. А можно сразу применять правило: перенесём множитель 5 из правой части в левую — он окажется в знаменателе:

$$\frac{15}{5} = x$$

Получаем: $3 = x$, или $x = 3$.

Пример 6

Отрицательный множитель

Рассмотрим уравнение, в котором множитель отрицательный:

$$-5x = 20$$

Переносим множитель -5 в правую часть. Он оказывается в знаменателе, и минус тоже переходит:

$$x = \frac{20}{-5} = -\frac{20}{5} = -4$$

Пример 7

Когда ответ — отрицательная дробь

Давайте решим уравнение, в котором ответ получается отрицательным:

$$7x = -14$$

Переносим множитель 7:

$$x = \frac{-14}{7} = -2$$

Пример 8

Ещё пример с отрицательной дробью

Возьмём уравнение, при решении которого получается отрицательная дробь:

$$4x = -6$$

Переносим множитель 4:

$$x = \frac{-6}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Пример 9

Множитель — буква

Бывают уравнения, где множитель — не число, а буква. Например:

$$ax = 12$$

Здесь a — известное число. Применяем то же правило:

$$x = \frac{12}{a}$$

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $2x = 10$ **4)** $5x = 25$ **7)** $8x = 40$ **10)** $12x = 60$

2) $3x = 15$ **5)** $6x = 30$ **8)** $9x = 45$ **11)** $15x = 75$

3) $4x = 20$ **6)** $7x = 35$ **9)** $10x = 50$ **12)** $20x = 100$

2. Решите уравнения:

1) $2x = 6$ **4)** $5x = 15$ **7)** $8x = 24$ **10)** $12x = 36$

2) $3x = 9$ **5)** $6x = 18$ **8)** $9x = 27$ **11)** $15x = 45$

3) $4x = 12$ **6)** $7x = 21$ **9)** $10x = 30$ **12)** $20x = 60$

3. Решите уравнения:

1) $2x = 5$ **4)** $5x = 12$ **7)** $8x = 18$ **10)** $12x = 25$

2) $3x = 7$ **5)** $6x = 15$ **8)** $9x = 20$ **11)** $15x = 32$

3) $4x = 9$ **6)** $7x = 16$ **9)** $10x = 21$ **12)** $20x = 42$

4. Решите уравнения:

1) $10 = 2x$ **5)** $30 = 5x$ **9)** $48 = 12x$

2) $15 = 3x$ **6)** $36 = 9x$ **10)** $50 = 25x$

3) $20 = 4x$ **7)** $40 = 8x$ **11)** $60 = 20x$

4) $24 = 6x$ **8)** $45 = 15x$ **12)** $100 = 25x$

5. Решите уравнения:

1) $-2x = 10$ **5)** $-6x = -30$ **9)** $-10x = -50$

2) $-3x = 15$ **6)** $-7x = 35$ **10)** $-12x = 60$

3) $-4x = 20$ **7)** $-8x = -40$ **11)** $-15x = -75$

4) $-5x = -25$ **8)** $-9x = 45$ **12)** $-20x = 100$

6. Решите уравнения:

1) $3x = 8$ **5)** $6x = 13$ **9)** $13x = 39$

2) $5x = 12$ **6)** $8x = 19$ **10)** $14x = 28$

3) $7x = 15$ **7)** $9x = 22$ **11)** $16x = 32$

4) $4x = 11$ **8)** $11x = 33$ **12)** $18x = 45$

7. Решите уравнения и запишите ответ в виде десятичной дроби:

1) $2x = 5$ **5)** $10x = 25$ **9)** $4x = 2$

2) $4x = 6$ **6)** $20x = 35$ **10)** $6x = 3$

3) $5x = 8$ **7)** $25x = 40$ **11)** $8x = 2$

4) $8x = 12$ **8)** $50x = 75$ **12)** $10x = 4$

8. Выразите x из уравнения:

1) $ax = b$

2) $kx = m$

3) $px = q$

4) $5x = a$

5) $3x = c$

6) $7x = d$

7) $ax = 10$

8) $bx = 15$

9) $cx = 20$

10) $mx = n$

11) $rx = s$

12) $tx = u$

Уравнения вида $ax + b = c$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, где неизвестное сначала умножается на число, а потом к этому прибавляется или вычитается известное число. Пример такого уравнения, в котором a, b и c — известные числа, а x — неизвестное:

$$ax + b = c$$

Чтобы решить уравнение такого вида, нам нужно применить уже знакомые правила. Сначала переносим слагаемое b в правую часть (знак меняется на противоположный), а потом переносим множитель a в знаменатель.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Два шага

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$2x + 3 = 7$$

Сначала перенесём +3 в правую часть. При переносе плюс меняется на минус:

$$2x = 7 - 3$$

$$2x = 4$$

Теперь перед нами уравнение вида $ax = b$. Переносим множитель 2 в знаменатель:

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Пример 2

Когда b отрицательное

Рассмотрим уравнение, в котором b отрицательное:

$$3x - 4 = 8$$

Переносим -4 в правую часть. При переносе минус меняется на плюс:

$$3x = 8 + 4$$

$$3x = 12$$

Переносим множитель 3:

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

Пример 3

Когда ответ — дробь

Давайте рассмотрим уравнение, при решении которого получается дробь:

$$4x + 5 = 7$$

Переносим +5 в правую часть:

$$4x = 7 - 5$$

$$4x = 2$$

Переносим множитель 4:

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Пример 4

Ещё один пример с дробным ответом

Возьмём уравнение, где после переноса получается дробь:

$$6x - 3 = 4$$

Переносим -3 в правую часть:

$$6x = 4 + 3$$

$$6x = 7$$

Переносим множитель 6:

$$x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

Пример 5

Когда c меньше b

Рассмотрим уравнение, в котором число в правой части меньше того, что переносим:

$$5x + 8 = 3$$

Переносим $+8$ в правую часть:

$$5x = 3 - 8$$

$$5x = -5$$

Переносим множитель 5:

$$x = \frac{-5}{5} = -1$$

Пример 6

Когда x стоит справа

Бывает, что неизвестное стоит в правой части. Например:

$$10 = 3x + 1$$

Переносим $+1$ из правой части в левую:

$$10 - 1 = 3x$$

$$9 = 3x$$

Теперь переносим множитель 3 из правой части в левую (он окажется в знаменателе):

$$\frac{9}{3} = x$$

$$3 = x$$

Пример 7

Когда и b, и c отрицательные

Давайте решим уравнение, в котором встречаются отрицательные числа:

$$2x - 5 = -9$$

Переносим -5 в правую часть:

$$2x = -9 + 5$$

$$2x = -4$$

Переносим множитель 2:

$$x = \frac{-4}{2} = -2$$

Пример 8

Когда a отрицательное

Рассмотрим уравнение, в котором множитель отрицательный:

$$-3x + 7 = 1$$

Переносим +7 в правую часть:

$$-3x = 1 - 7$$

$$-3x = -6$$

Переносим множитель −3 в знаменатель (минус тоже переходит):

$$x = \frac{-6}{-3} = 2$$

Пример 9

Когда после переноса получается дробь с минусом

Возьмём уравнение, где ответ будет отрицательной дробью:

$$4x + 9 = 2$$

Переносим +9:

$$4x = 2 - 9$$

$$4x = -7$$

Переносим множитель 4:

$$x = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4} = -1.75$$

Пример 10

Коэффициенты — буквы

Бывают уравнения, где вместо чисел стоят буквы. Например:

$$ax + b = c$$

Здесь a, b, c — известные числа. Применяем те же правила. Сначала переносим b:

$$ax = c - b$$

Потом переносим множитель a:

$$x = \frac{c - b}{a}$$

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $2x + 3 = 7$
2) $3x + 4 = 10$
3) $4x + 5 = 13$
4) $5x + 2 = 12$
5) $6x + 1 = 19$
6) $7x + 3 = 24$
7) $8x + 4 = 28$
8) $9x + 5 = 32$
9) $10x + 6 = 36$
10) $12x + 7 = 43$
11) $15x + 8 = 53$
12) $20x + 9 = 69$

2. Решите уравнения:

1) $2x - 3 = 5$ 4) $5x - 2 = 13$ 7) $8x - 4 = 20$ 10) $12x - 7 = 29$

2) $3x - 4 = 8$ 5) $6x - 1 = 17$ 8) $9x - 5 = 22$ 11) $15x - 8 = 37$

3) $4x - 5 = 11$ 6) $7x - 3 = 18$ 9) $10x - 6 = 24$ 12) $20x - 9 = 51$

3. Решите уравнения:

1) $2x + 5 = 6$ 4) $5x + 12 = 13$ 7) $8x + 11 = 12$ 10) $12x + 19 = 20$

2) $3x + 7 = 8$ 5) $6x + 15 = 16$ 8) $9x + 14 = 15$ 11) $15x + 22 = 23$

3) $4x + 9 = 10$ 6) $7x + 8 = 9$ 9) $10x + 17 = 18$ 12) $20x + 31 = 32$

4. Решите уравнения:

1) $2x - 5 = 3$ 4) $5x - 12 = 8$ 7) $8x - 11 = 6$ 10) $12x - 19 = 10$

2) $3x - 7 = 5$ 5) $6x - 15 = 9$ 8) $9x - 14 = 8$ 11) $15x - 22 = 12$

3) $4x - 9 = 7$ 6) $7x - 8 = 4$ 9) $10x - 17 = 9$ 12) $20x - 31 = 14$

5. Решите уравнения, где x справа:

1) $9 = 2x + 3$ 5) $15 = 6x - 3$ 9) $35 = 10x + 5$

2) $14 = 3x + 5$ 6) $20 = 7x - 1$ 10) $40 = 12x + 4$

3) $19 = 4x + 7$ 7) $25 = 8x + 1$ 11) $45 = 15x + 10$

4) $10 = 5x - 5$ 8) $30 = 9x + 3$ 12) $50 = 20x + 10$

6. Решите уравнения с отрицательными числами:

1) $2x + 5 = -3$ 5) $6x - 4 = -10$ 9) $-4x + 9 = 5$

2) $3x + 7 = -2$ 6) $7x - 5 = -12$ 10) $-5x - 3 = 2$

3) $4x + 9 = -1$ 7) $-2x + 5 = 3$ 11) $-6x - 4 = 5$

4) $5x - 3 = -8$ 8) $-3x + 7 = 4$ 12) $-7x - 5 = 8$

7. Решите уравнения:

1) $2x + 3 = 4$ 5) $6x - 3 = 5$ 9) $10x + 7 = 6$

2) $3x + 5 = 7$ 6) $7x - 4 = 6$ 10) $11x - 4 = 3$

3) $4x + 7 = 9$ 7) $8x + 3 = 2$ 11) $12x - 5 = 4$

4) $5x - 2 = 4$ 8) $9x + 5 = 4$ 12) $13x - 6 = 5$

8. Выразите x из уравнения:

1) $ax + b = c$ 5) $kx - m = n$ 9) $bx + c = d$

2) $kx + m = n$ 6) $px - q = r$ 10) $mx - n = p$

3) $px + q = r$ 7) $ax + b = 0$ 11) $rx + s = t$

4) $ax - b = c$ 8) $ax - b = 0$ 12) $dx - e = f$

Уравнения со скобками и приведением подобных

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, в которых неизвестное спрятано внутрь скобок. Чтобы добраться до него, нужно сначала эти скобки раскрыть.

Алгоритм решения таких уравнений:

1. Раскрываем все скобки (используем распределительный закон).
2. Приводим подобные слагаемые (складываем всё с x и всё без x отдельно).
3. Переносим слагаемые с x в одну часть уравнения, а числа — в другую (знаки при переносе меняем).
4. Снова приводим подобные, если нужно.
5. Решаем получившееся уравнение вида $ax = b$ (переносим множитель в знаменатель).

Как это работает на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Раскрываем одну скобку

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$2(x + 3) = 10$$

Сначала раскроем скобку. Для этого умножим 2 на каждое слагаемое внутри скобки:

$$2x + 6 = 10$$

Теперь перед нами уравнение вида $ax + b = c$. Переносим +6 в правую часть:

$$2x = 10 - 6$$

$$2x = 4$$

Переносим множитель 2 в знаменатель:

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Пример 2

Скобка с вычитанием

Рассмотрим уравнение со скобкой, внутри которой вычитание:

$$3(x - 4) = 15$$

Раскрываем скобку: умножаем 3 на x и на -4:

$$3x - 12 = 15$$

Переносим -12 в правую часть (становится +12):

$$3x = 15 + 12$$

$$3x = 27$$

Переносим множитель 3:

$$x = \frac{27}{3} = 9$$

Пример 3

Когда перед скобкой минус

Давайте разберём случай, когда перед скобкой стоит знак минус:

$$5 - 2(x + 1) = 3$$

Сначала раскроем скобку. Помним, что минус перед скобкой меняет знаки всех слагаемых внутри:

$$5 - 2x - 2 = 3$$

Теперь приведём подобные в левой части: $5 - 2 = 3$, поэтому:

$$3 - 2x = 3$$

Перенесём число 3 в правую часть:

$$-2x = 3 - 3$$

$$-2x = 0$$

Переносим множитель -2:

$$x = \frac{0}{-2} = 0$$

Пример 4

Собираем неизвестные в одной части

Рассмотрим уравнение, где x есть и слева, и справа:

$$5x + 4 = 3x + 10$$

Перенесём все слагаемые с x в левую часть, а числа — в правую. При переносе $3x$ становится $-3x$, а $+4$ становится -4:

$$5x - 3x = 10 - 4$$

Приводим подобные:

$$2x = 6$$

Переносим множитель 2:

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

Пример 5

Несколько скобок

Возьмём уравнение, в котором нужно раскрыть две скобки:

$$2(x + 3) + 4(x - 1) = 14$$

Раскрываем обе скобки:

$$2x + 6 + 4x - 4 = 14$$

Приводим подобные в левой части: $2x + 4x = 6x$, $6 - 4 = 2$:

$$6x + 2 = 14$$

Переносим $+2$ в правую часть:

$$6x = 14 - 2$$

$$6x = 12$$

Переносим множитель 6:

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

Пример 6

Когда после раскрытия получается дробь

Рассмотрим уравнение, где ответ получится дробным:

$$3(2x - 1) = 8$$

Раскрываем скобку:

$$6x - 3 = 8$$

Переносим -3 в правую часть:

$$6x = 8 + 3$$

$$6x = 11$$

Переносим множитель 6:

$$x = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$$

Пример 7

Когда в скобках x с коэффициентом

Решим уравнение:

$$2(3x - 4) = 5(x + 2)$$

Раскрываем обе скобки:

$$6x - 8 = 5x + 10$$

Собираем x в левой части, числа — в правой:

$$6x - 5x = 10 + 8$$

$$x = 18$$

Пример 8

Длинное уравнение с несколькими шагами

Давайте решим более сложное уравнение:

$$3(x + 2) - 2(2x - 1) = 4x + 7$$

Раскрываем скобки (внимательно со знаками во второй скобке):

$$3x + 6 - 4x + 2 = 4x + 7$$

Приводим подобные в левой части: $3x - 4x = -x$, $6 + 2 = 8$:

$$-x + 8 = 4x + 7$$

Собираем x в одной части (перенесём $-x$ вправо, а $+7$ влево):

$$8 - 7 = 4x + x$$

$$1 = 5x$$

Переносим множитель 5:

$$\frac{1}{5} = x$$
$$x = 0.2$$

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $2(x + 3) = 10$ **4)** $5(x + 2) = 25$ **7)** $8(x + 4) = 32$ **10)** $12(x + 3) = 48$

2) $3(x + 4) = 15$ **5)** $6(x + 1) = 18$ **8)** $9(x + 5) = 36$ **11)** $15(x + 1) = 45$

3) $4(x + 5) = 20$ **6)** $7(x + 3) = 28$ **9)** $10(x + 2) = 40$ **12)** $20(x + 2) = 80$

2. Решите уравнения:

1) $2(x-3)=8$
4) $5(x-2)=15$
7) $8(x-4)=16$
10) $12(x-3)=24$
2) $3(x-4)=9$
5) $6(x-1)=12$
8) $9(x-5)=18$
11) $15(x-1)=30$
3) $4(x-5)=12$
6) $7(x-3)=14$
9) $10(x-2)=20$
12) $20(x-2)=40$

3. Решите уравнения:

1) $5-2(x+1)=3$
2) $7-3(x+2)=4$
3) $9-4(x+3)=5$
4) $10-5(x-1)=5$
5) $12-3(x-2)=6$
6) $15-4(x-3)=7$
7) $8-2(2x+1)=2$
8) $9-3(3x-1)=3$
9) $10-4(2x-3)=2$
10) $11-5(3x+2)=1$
11) $12-2(4x-5)=6$
12) $14-3(5x+1)=8$

4. Решите уравнения:

1) $5x+4=3x+10$
2) $7x+5=4x+14$
3) $9x+6=5x+18$
4) $8x-3=5x+6$
5) $10x-7=6x+5$
6) $12x-5=8x+7$
7) $4x+9=7x-6$
8) $6x+8=9x-7$
9) $8x+5=11x-4$
10) $3x-8=5x-12$
11) $5x-9=8x-18$
12) $7x-12=10x-24$

5. Решите уравнения:

1) $2(x+3)+4(x-1)=14$
2) $3(x+2)+5(x-2)=16$
3) $4(x+1)+6(x-3)=18$
4) $5(x-2)+3(x+4)=22$
5) $6(x-1)+4(x+3)=26$
6) $7(x-3)+5(x+2)=24$
7) $2(2x+1)+3(3x-2)=11$
8) $3(3x+2)+4(2x-1)=21$
9) $4(4x-1)+5(3x+2)=31$
10) $5(2x+3)-3(4x-1)=8$
11) $6(3x-2)-2(5x+4)=10$
12) $7(4x+1)-4(6x-3)=15$

6. Решите уравнения:

1) $2(x+3)=7$
2) $3(x-2)=5$
3) $4(x+1)=9$
4) $5(x-3)=8$
5) $6(x+2)=13$
6) $7(x-4)=15$
7) $3(2x+1)=8$
8) $4(3x-2)=11$
9) $5(4x+3)=14$
10) $2(3x-1)+3(x+2)=10$
11) $4(2x+3)-2(3x-1)=9$
12) $5(x+2)-3(2x-1)=4$

7. Решите уравнения:

1) $3(2x-5)=4(x+1)$
2) $5(3x+2)=2(4x-1)$
3) $4(5x-3)=6(2x+1)$
4) $2(3x+4)-3(2x-1)=5$
5) $4(5x-2)-5(4x+1)=7$
6) $6(2x+3)-4(3x-5)=10$
7) $7(x+2)-3(2x-1)=2(3x+4)$
8) $5(2x-3)+2(4x+1)=3(5x-2)$
9) $4(3x-2)+3(5x+1)=5(4x+3)$
10) $2(x+3)+3(x-2)=4(x+1)-5$
11) $3(2x-1)-2(3x+4)=5(x-2)+7$
12) $4(5x+2)-3(4x-1)=2(3x+5)+8$

8. Выразите x из уравнения:

1) $a(x+b)=c$
2) $a(x-b)=c$
3) $a(bx+c)=d$
4) $a(bx-c)=d$
5) $p(x+q)=r$
6) $p(x-q)=r$
7) $m(nx+k)=p$
8) $m(nx-k)=p$
9) $a(x+b)+c=d$

10) $a(x-b)-c=d$

11) $k(mx+n)=p(x+q)$

12) $k(mx-n)=p(x-q)$

Уравнения вида $\dfrac{a}{b}x = c$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, где неизвестное умножается на дробь. Пример такого уравнения, в котором a, b и c — известные числа, а x — неизвестное:

$$\frac{a}{b} \cdot x = c$$

Чтобы решить уравнение такого вида, нам нужно использовать правило переноса для множителя-дроби:

Если неизвестное умножается на дробь, то эту дробь можно перенести в другую часть уравнения, перевернув её (умножение заменится делением, а деление на дробь — это умножение на перевёрнутую дробь).

Другими словами, из уравнения $\frac{a}{b} \cdot x = c$ получаем:

$$x = c : \frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Дробь с числителем 1

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$\frac{1}{2}x = 5$$

Здесь x умножается на $\frac{1}{2}$. Переносим эту дробь в правую часть, переворачивая её:

$$x = 5 \cdot \frac{2}{1} = 5 \cdot 2 = 10$$

Пример 2

Обыкновенная дробь

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{2}{3}x = 8$$

Переносим дробь $\frac{2}{3}$ в правую часть, переворачивая её:

$$x = 8 \cdot \frac{3}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Пример 3

Когда в числителе не 1

Давайте решим уравнение:

$$\frac{3}{4}x = 9$$

Переносим дробь $\frac{3}{4}$:

$$x = 9 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9 \cdot 4}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Пример 4

Когда ответ — дробь

Возьмём уравнение, где ответ получится дробным:

$$\frac{2}{5}x = 3$$

Переносим дробь $\frac{2}{5}$:

$$x = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} = 7.5$$

Пример 5

Когда c — дробь

Рассмотрим случай, когда число в правой части тоже дробное:

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}$$

Переносим дробь $\frac{3}{4}$:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Пример 6

Когда x справа

Бывает, что неизвестное стоит в правой части:

$$10 = \frac{2}{3}x$$

Перепишем уравнение так, чтобы x был слева: $\frac{2}{3}x = 10$. А можно сразу применять правило: переносим дробь $\frac{2}{3}$ из правой части в левую, переворачивая её:

$$10 \cdot \frac{3}{2} = x$$

$$\frac{30}{2} = x$$

$$15 = x$$

Пример 7

Дробь с минусом

Рассмотрим уравнение, где дробь отрицательная:

$$-\frac{3}{5}x = 6$$

Переносим дробь $-\frac{3}{5}$ в правую часть. Минус тоже переходит:

$$x = 6 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{6 \cdot 5}{3} = -\frac{30}{3} = -10$$

Пример 8

Когда в ответе отрицательная дробь

Давайте решим уравнение:

$$\frac{2}{7}x = -4$$

Переносим дробь $\frac{2}{7}$:

$$x = -4 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{4 \cdot 7}{2} = -\frac{28}{2} = -14$$

Пример 9

Дробь можно сократить

Возьмём уравнение, где при умножении можно сократить:

$$\frac{4}{6}x = 8$$

Заметим, что дробь $\frac{4}{6}$ можно сократить на 2: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Тогда:

$$\frac{2}{3}x = 8$$

$$x = 8 \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Можно и не сокращать заранее, а сократить потом:

$$x = 8 \cdot \frac{6}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

Пример 10

Когда a и b — буквы

Бывают уравнения, где вместо чисел стоят буквы. Например:

$$\frac{a}{b} \cdot x = c$$

Здесь a, b, c — известные числа. Применяем то же правило:

$$x = c \cdot \frac{b}{a} = \frac{bc}{a}$$

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{2}x = 4$ **4)** $\frac{1}{5}x = 3$ **7)** $\frac{1}{8}x = 5$ **10)** $\frac{1}{12}x = 3$

2) $\frac{1}{3}x = 5$ **5)** $\frac{1}{6}x = 2$ **8)** $\frac{1}{9}x = 3$ **11)** $\frac{1}{15}x = 2$

3) $\frac{1}{4}x = 6$ **6)** $\frac{1}{7}x = 4$ **9)** $\frac{1}{10}x = 7$ **12)** $\frac{1}{20}x = 4$

2. Решите уравнения:

1) $\frac{2}{3}x = 6$ **4)** $\frac{5}{6}x = 10$ **7)** $\frac{4}{9}x = 12$ **10)** $\frac{3}{8}x = 6$

2) $\frac{3}{4}x = 9$ **5)** $\frac{2}{5}x = 8$ **8)** $\frac{5}{8}x = 15$ **11)** $\frac{5}{12}x = 10$

3) $\frac{4}{5}x = 8$ **6)** $\frac{3}{7}x = 9$ **9)** $\frac{7}{10}x = 14$ **12)** $\frac{7}{12}x = 14$

3. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{2}x = 3$ **3)** $\frac{2}{3}x = 5$ **5)** $\frac{4}{5}x = 6$ **7)** $\frac{2}{5}x = 3$

2) $\frac{1}{3}x = 2$ **4)** $\frac{3}{4}x = 7$ **6)** $\frac{5}{6}x = 7$ **8)** $\frac{3}{7}x = 4$

9) $\frac{4}{9}x = 5$ 10) $\frac{5}{8}x = 4$ 11) $\frac{7}{10}x = 6$ 12) $\frac{8}{15}x = 4$

4. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$
2) $\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$
3) $\frac{3}{4}x = \frac{2}{3}$
4) $\frac{4}{5}x = \frac{3}{4}$
5) $\frac{2}{5}x = \frac{1}{3}$
6) $\frac{3}{7}x = \frac{2}{5}$
7) $\frac{5}{8}x = \frac{3}{4}$
8) $\frac{7}{9}x = \frac{2}{3}$
9) $\frac{8}{11}x = \frac{4}{5}$
10) $\frac{3}{10}x = \frac{1}{2}$
11) $\frac{5}{12}x = \frac{2}{3}$
12) $\frac{7}{15}x = \frac{3}{5}$

5. Решите уравнения:

1) $6 = \frac{1}{2}x$
2) $8 = \frac{2}{3}x$
3) $9 = \frac{3}{4}x$
4) $10 = \frac{4}{5}x$
5) $12 = \frac{3}{2}x$
6) $15 = \frac{5}{3}x$
7) $20 = \frac{4}{3}x$
8) $24 = \frac{6}{5}x$
9) $30 = \frac{5}{2}x$
10) $40 = \frac{8}{3}x$
11) $50 = \frac{10}{7}x$
12) $100 = \frac{25}{4}x$

6. Решите уравнения:

1) $-\frac{1}{2}x = 4$
2) $-\frac{2}{3}x = 6$
3) $-\frac{3}{4}x = 9$
4) $\frac{2}{3}x = -8$
5) $\frac{3}{5}x = -9$
6) $\frac{4}{7}x = -12$
7) $-\frac{3}{5}x = -6$
8) $-\frac{5}{8}x = -10$
9) $-\frac{7}{9}x = -14$
10) $-\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$
11) $\frac{3}{4}x = -\frac{5}{6}$
12) $-\frac{5}{6}x = -\frac{2}{3}$

7. Решите уравнения:

1) $\frac{2}{4}x = 5$
2) $\frac{3}{6}x = 4$
3) $\frac{4}{8}x = 6$
4) $\frac{5}{10}x = 3$
5) $\frac{6}{9}x = 8$
6) $\frac{8}{12}x = 10$
7) $\frac{9}{12}x = 6$
8) $\frac{10}{15}x = 4$
9) $\frac{12}{16}x = 9$
10) $\frac{14}{21}x = 6$
11) $\frac{15}{25}x = 9$
12) $\frac{20}{30}x = 8$

8. Выразите x из уравнения:

1) $\frac{a}{b}x = c$
2) $\frac{m}{n}x = p$
3) $\frac{p}{q}x = r$
4) $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$
5) $\frac{m}{n}x = \frac{p}{q}$
6) $\frac{k}{l}x = \frac{m}{n}$
7) $c = \frac{a}{b}x$
8) $d = \frac{m}{n}x$
9) $f = \frac{p}{q}x$
10) $-\frac{a}{b}x = c$
11) $\frac{a}{b}x = -c$
12) $-\frac{a}{b}x = -c$

Уравнения вида $ax = \frac{b}{c}$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, где неизвестное умножается на целое число, а результат равен дроби. Пример такого уравнения, в котором a, b и c — известные числа, а x — неизвестное:

$$ax = \frac{b}{c}$$

Чтобы решить уравнение такого вида, нам нужно использовать правило переноса для множителя:

Если неизвестное умножается на число, то это число можно перенести в другую часть уравнения, записав его в знаменателе.

Другими словами, из уравнения $ax = \frac{b}{c}$ получаем:

$$x = \frac{b}{c} : a = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{ac}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Правая часть — простая дробь

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$2x = \frac{3}{4}$$

Здесь x умножается на 2. Переносим множитель 2 в правую часть, записывая его в знаменателе:

$$x = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Пример 2

Когда числитель дроби — число

Рассмотрим уравнение:

$$3x = \frac{5}{6}$$

Переносим множитель 3:

$$x = \frac{5}{6} : 3 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

Пример 3

Когда можно сократить

Давайте решим уравнение, где в ответе получится дробь, которую можно сократить:

$$4x = \frac{2}{3}$$

Переносим множитель 4:

$$x = \frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Пример 4

Ещё один пример с сокращением

Возьмём уравнение:

$$6x = \frac{4}{5}$$

Переносим множитель 6:

$$x = \frac{4}{5} : 6 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

Пример 5

Когда правая часть — целое число, записанное как дробь

Иногда правая часть записана как целое число, но мы можем представить её в виде дроби:

$$5x = 3$$

Записываем 3 как $\frac{3}{1}$ и решаем:

$$x = \frac{3}{1} : 5 = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Пример 6

Когда x справа

Бывает, что неизвестное стоит в правой части:

$$\frac{2}{3} = 4x$$

Перепишем уравнение так, чтобы x был слева: $4x = \frac{2}{3}$. А можно сразу применять правило:

$$x = \frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Пример 7

Отрицательная правая часть

Рассмотрим уравнение, где правая часть отрицательная:

$$3x = -\frac{2}{5}$$

Переносим множитель 3:

$$x = -\frac{2}{5} : 3 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$$

Пример 8

Отрицательный множитель

Давайте решим уравнение с отрицательным множителем:

$$-4x = \frac{3}{7}$$

Переносим множитель -4:

$$x = \frac{3}{7} : (-4) = \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{28}$$

Пример 9

Когда и множитель, и дробь отрицательные

Возьмём уравнение:

$$-5x = -\frac{2}{3}$$

Можно сразу заметить, что минус в левой части и минус в правой части сокращаются. Получаем:

$$5x = \frac{2}{3}$$

Теперь решаем обычное уравнение:

$$x = \frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Пример 10

Когда a, b, c — буквы

Бывают уравнения, где вместо чисел стоят буквы. Например:

$$ax = \frac{b}{c}$$

Здесь a, b, c — известные числа. Применяем то же правило:

$$x = \frac{b}{c} : a = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{ac}$$

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $2x = \frac{1}{2}$ **4)** $5x = \frac{1}{5}$ **7)** $8x = \frac{1}{8}$ **10)** $12x = \frac{1}{12}$

2) $3x = \frac{1}{3}$ **5)** $6x = \frac{1}{6}$ **8)** $9x = \frac{1}{9}$ **11)** $15x = \frac{1}{15}$

3) $4x = \frac{1}{4}$ **6)** $7x = \frac{1}{7}$ **9)** $10x = \frac{1}{10}$ **12)** $20x = \frac{1}{20}$

2. Решите уравнения:

1) $2x = \frac{3}{4}$ **4)** $5x = \frac{2}{3}$ **7)** $8x = \frac{5}{8}$ **10)** $12x = \frac{5}{12}$

2) $3x = \frac{2}{5}$ **5)** $6x = \frac{5}{6}$ **8)** $9x = \frac{4}{9}$ **11)** $15x = \frac{8}{15}$

3) $4x = \frac{3}{5}$ **6)** $7x = \frac{3}{7}$ **9)** $10x = \frac{7}{10}$ **12)** $20x = \frac{9}{20}$

3. Решите уравнения (с сокращением):

1) $2x = \frac{2}{3}$ **4)** $5x = \frac{5}{6}$ **7)** $8x = \frac{8}{9}$ **10)** $12x = \frac{12}{13}$

2) $3x = \frac{3}{4}$ **5)** $6x = \frac{6}{7}$ **8)** $9x = \frac{9}{10}$ **11)** $15x = \frac{15}{16}$

3) $4x = \frac{4}{5}$ **6)** $7x = \frac{7}{8}$ **9)** $10x = \frac{10}{11}$ **12)** $20x = \frac{20}{21}$

4. Решите уравнения:

1) $2x = \frac{4}{6}$ **4)** $5x = \frac{10}{15}$ **7)** $8x = \frac{16}{24}$ **10)** $12x = \frac{24}{36}$

2) $3x = \frac{6}{9}$ **5)** $6x = \frac{12}{18}$ **8)** $9x = \frac{18}{27}$ **11)** $15x = \frac{30}{45}$

3) $4x = \frac{8}{12}$ **6)** $7x = \frac{14}{21}$ **9)** $10x = \frac{20}{30}$ **12)** $20x = \frac{40}{60}$

5. Решите уравнения, где x справа:

1) $\frac{1}{2} = 2x$ **2)** $\frac{2}{3} = 3x$ **3)** $\frac{3}{4} = 4x$

4) $\frac{4}{5} = 5x$

5) $\frac{5}{6} = 6x$

6) $\frac{3}{5} = 4x$

7) $\frac{5}{8} = 3x$

8) $\frac{7}{10} = 5x$

9) $\frac{8}{9} = 7x$

10) $\frac{2}{7} = 6x$

11) $\frac{5}{9} = 8x$

12) $\frac{7}{12} = 5x$

6. Решите уравнения с отрицательными числами:

1) $2x = -\frac{1}{2}$

2) $3x = -\frac{2}{3}$

3) $4x = -\frac{3}{4}$

4) $-2x = \frac{1}{2}$

5) $-3x = \frac{2}{3}$

6) $-4x = \frac{3}{4}$

7) $-5x = -\frac{2}{5}$

8) $-6x = -\frac{5}{6}$

9) $-7x = -\frac{3}{7}$

10) $5x = -\frac{3}{5}$

11) $6x = -\frac{5}{6}$

12) $8x = -\frac{3}{8}$

7. Решите уравнения:

1) $2x = \frac{3}{2}$

2) $3x = \frac{4}{3}$

3) $4x = \frac{5}{4}$

4) $5x = \frac{7}{5}$

5) $6x = \frac{8}{6}$

6) $7x = \frac{9}{7}$

7) $8x = \frac{11}{8}$

8) $9x = \frac{13}{9}$

9) $10x = \frac{14}{10}$

10) $11x = \frac{15}{11}$

11) $12x = \frac{17}{12}$

12) $13x = \frac{19}{13}$

8. Выразите x из уравнения:

1) $ax = \frac{b}{c}$

2) $mx = \frac{n}{p}$

3) $kx = \frac{l}{m}$

4) $ax = \frac{b}{c}$

5) $px = \frac{q}{r}$

6) $dx = \frac{e}{f}$

7) $\frac{b}{c} = ax$

8) $\frac{m}{n} = px$

9) $\frac{r}{s} = tx$

10) $ax = -\frac{b}{c}$

11) $-ax = \frac{b}{c}$

12) $-ax = -\frac{b}{c}$

Уравнения вида $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, где неизвестное умножается на дробь, и результат тоже дробь. Пример такого уравнения, в котором a, b, c, d — известные числа, а x — неизвестное:

$$\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d}$$

Такие уравнения можно решать тремя способами. Выбор способа зависит от того, какие числа в уравнении и что вам удобнее.

Способ 1. Умножение на перевёрнутую дробь

Этот способ работает всегда. Переносим дробь $\frac{a}{b}$ в правую часть, переворачивая её:

$$x = \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bc}{ad}$$

Способ 2. Метод крест-накрест

В этом методе знаменатель левой дроби переходит в числитель правой части, а знаменатель правой дроби переходит в числитель левой:

$$\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad axd = cb$$

Получаем уравнение $ad \cdot x = bc$, которое решаем обычным способом.

Способ 3. Умножение на общий знаменатель

Этот способ похож на метод крест-накрест, но здесь мы умножаем обе части на такое число, чтобы все дроби сократились. Обычно это произведение всех знаменателей или их наименьшее общее кратное.

Пример 1

Умножение на перевёрнутую дробь

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}$$

Применяем основное правило: переносим дробь $\frac{2}{3}$ в правую часть, переворачивая её:

$$x = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Пример 2

Метод крест-накрест

Решим то же уравнение методом крест-накрест:

$$\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}$$

Умножаем крест-накрест (левый числитель на правый знаменатель и наоборот):

$$2x \cdot 5 = 4 \cdot 3$$

$$10x = 12$$

$$x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Результат тот же, но мы избавились от дробей уже на первом шаге.

Пример 3

Умножение на общий знаменатель

Решим то же уравнение умножением на общий знаменатель. Общий знаменатель дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ равен $3 \cdot 5 = 15$:

$$\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}$$

Умножаем обе части на 15:

$$\frac{2}{3}x \cdot 15 = \frac{4}{5} \cdot 15$$

Сокращаем: $15 : 3 = 5$, поэтому $2x \cdot 5 = 10x$. И $15 : 5 = 3$, поэтому $4 \cdot 3 = 12$:

$$10x = 12$$

$$x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Пример 4

Когда удобно сократить

Рассмотрим уравнение, где можно сразу сократить:

$$\frac{3}{4}x = \frac{6}{8}$$

Заметим, что правую дробь можно сократить: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Тогда:

$$\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}$$

$$x = 1$$

Но если не заметить сокращение, метод крест-накрест тоже работает:

$$3x \cdot 8 = 6 \cdot 4$$

$$24x = 24$$

$$x = 1$$

Пример 5

Когда в знаменателях большие числа

Возьмём уравнение с большими числами:

$$\frac{7}{15}x = \frac{14}{25}$$

Метод крест-накрест:

$$7x \cdot 25 = 14 \cdot 15$$

$$175x = 210$$

$$x = \frac{210}{175} = \frac{42}{35} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Умножение на общий знаменатель $15 \cdot 25 = 375$:

$$\frac{7}{15}x \cdot 375 = \frac{14}{25} \cdot 375$$

Сокращаем: $375 : 15 = 25$, поэтому $7x \cdot 25 = 175x$. И $375 : 25 = 15$, поэтому $14 \cdot 15 = 210$:

$$175x = 210$$

$$x = \frac{210}{175} = \frac{6}{5}$$

Основное правило даст тот же результат:

$$x = \frac{14}{25} \cdot \frac{15}{7} = \frac{14 \cdot 15}{25 \cdot 7} = \frac{210}{175} = \frac{6}{5}$$

Пример 6

Когда можно сократить крест-накрест

Иногда в методе крест-накрест можно сократить ещё до умножения:

$$\frac{8}{15}x = \frac{4}{9}$$

Записываем крест-накрест:

$$8x \cdot 9 = 4 \cdot 15$$

Замечаем, что 8 и 4 можно сократить на 4, а 9 и 15 можно сократить на 3:

$$2x \cdot 3 = 1 \cdot 5$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Пример 7

Когда x справа

Бывает, что неизвестное стоит в правой части:

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{4}x$$

Перепишем уравнение так, чтобы x был слева: $\frac{3}{4}x = \frac{2}{5}$. А можно сразу применять любой способ.
Метод крест-накрест:

$$3x \cdot 5 = 2 \cdot 4$$

$$15x = 8$$

$$x = \frac{8}{15}$$

Умножение на общий знаменатель $4 \cdot 5 = 20$:

$$\frac{3}{4}x \cdot 20 = \frac{2}{5} \cdot 20$$

$$3x \cdot 5 = 2 \cdot 4$$

$$15x = 8$$

$$x = \frac{8}{15}$$

Пример 8

Отрицательные числа

Рассмотрим уравнение с минусами:

$$-\frac{3}{5}x = \frac{2}{7}$$

Метод крест-накрест (минус можно учесть в любом месте):

$$-3x \cdot 7 = 2 \cdot 5$$

$$-21x = 10$$

$$x = -\frac{10}{21}$$

Умножение на общий знаменатель $5 \cdot 7 = 35$:

$$-\frac{3}{5}x \cdot 35 = \frac{2}{7} \cdot 35$$

$$-3x \cdot 7 = 2 \cdot 5$$

$$-21x = 10$$

$$x = -\frac{10}{21}$$

Пример 9

Отрицательные с обеих сторон

Возьмём уравнение, где минусы с обеих сторон:

$$-\frac{4}{9}x = -\frac{5}{6}$$

Сначала сокращаем минусы (можно и не сокращать, но так проще):

$$\frac{4}{9}x = \frac{5}{6}$$

Теперь метод крест-накрест:

$$4x \cdot 6 = 5 \cdot 9$$

$$24x = 45$$

$$x = \frac{45}{24} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

Пример 10

Когда a, b, c, d — буквы

Бывают уравнения, где вместо чисел стоят буквы. Например:

$$\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$$

Здесь a, b, c, d — известные числа. Применяем метод крест-накрест:

$$axd = cb$$

$$ad \cdot x = bc$$

$$x = \frac{bc}{ad}$$

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}$ **4)** $\frac{4}{5}x = \frac{3}{4}$ **7)** $\frac{7}{8}x = \frac{6}{7}$ **10)** $\frac{10}{11}x = \frac{9}{10}$

2) $\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$ **5)** $\frac{5}{6}x = \frac{4}{5}$ **8)** $\frac{8}{9}x = \frac{7}{8}$ **11)** $\frac{11}{12}x = \frac{10}{11}$

3) $\frac{3}{4}x = \frac{2}{3}$ **6)** $\frac{6}{7}x = \frac{5}{6}$ **9)** $\frac{9}{10}x = \frac{8}{9}$ **12)** $\frac{12}{13}x = \frac{11}{12}$

2. Решите уравнения:

1) $\frac{2}{5}x = \frac{3}{7}$ **4)** $\frac{5}{8}x = \frac{4}{9}$ **7)** $\frac{5}{12}x = \frac{7}{15}$ **10)** $\frac{9}{20}x = \frac{8}{15}$

2) $\frac{3}{7}x = \frac{2}{5}$ **5)** $\frac{3}{10}x = \frac{7}{12}$ **8)** $\frac{7}{15}x = \frac{5}{12}$ **11)** $\frac{11}{18}x = \frac{13}{24}$

3) $\frac{4}{9}x = \frac{5}{8}$ **6)** $\frac{7}{12}x = \frac{3}{10}$ **9)** $\frac{8}{15}x = \frac{9}{20}$ **12)** $\frac{13}{24}x = \frac{11}{18}$

3. Решите уравнения:

1) $\frac{2}{4}x = \frac{3}{6}$ **4)** $\frac{5}{10}x = \frac{6}{12}$ **7)** $\frac{9}{12}x = \frac{12}{16}$ **10)** $\frac{14}{21}x = \frac{10}{15}$

2) $\frac{3}{6}x = \frac{4}{8}$ **5)** $\frac{6}{9}x = \frac{8}{12}$ **8)** $\frac{12}{16}x = \frac{9}{12}$ **11)** $\frac{15}{25}x = \frac{18}{30}$

3) $\frac{4}{8}x = \frac{5}{10}$ **6)** $\frac{8}{12}x = \frac{6}{9}$ **9)** $\frac{10}{15}x = \frac{14}{21}$ **12)** $\frac{18}{30}x = \frac{15}{25}$

4. Решите уравнения:

1) $\frac{3}{8}x = \frac{5}{12}$
2) $\frac{5}{12}x = \frac{7}{18}$
3) $\frac{7}{18}x = \frac{11}{24}$
4) $\frac{11}{24}x = \frac{13}{30}$
5) $\frac{13}{30}x = \frac{17}{36}$
6) $\frac{17}{36}x = \frac{19}{42}$
7) $\frac{4}{15}x = \frac{6}{25}$
8) $\frac{6}{25}x = \frac{8}{35}$
9) $\frac{8}{35}x = \frac{10}{45}$
10) $\frac{9}{16}x = \frac{15}{28}$
11) $\frac{15}{28}x = \frac{21}{40}$
12) $\frac{21}{40}x = \frac{27}{52}$

5. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}x$
2) $\frac{2}{3} = \frac{3}{4}x$
3) $\frac{3}{4} = \frac{4}{5}x$
4) $\frac{4}{5} = \frac{5}{6}x$
5) $\frac{5}{6} = \frac{6}{7}x$
6) $\frac{6}{7} = \frac{7}{8}x$
7) $\frac{3}{5} = \frac{4}{7}x$
8) $\frac{5}{8} = \frac{3}{4}x$
9) $\frac{7}{9} = \frac{5}{6}x$
10) $\frac{8}{11} = \frac{7}{12}x$
11) $\frac{9}{13} = \frac{8}{15}x$
12) $\frac{11}{14} = \frac{9}{16}x$

6. Решите уравнения:

1) $-\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}$
2) $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}$
3) $-\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}$
4) $\frac{2}{3}x = -\frac{3}{4}$
5) $-\frac{3}{4}x = -\frac{4}{5}$
6) $\frac{3}{4}x = -\frac{4}{5}$
7) $-\frac{5}{6}x = \frac{7}{8}$
8) $\frac{5}{6}x = -\frac{7}{8}$
9) $-\frac{7}{8}x = -\frac{9}{10}$
10) $-\frac{4}{9}x = \frac{5}{12}$
11) $\frac{4}{9}x = -\frac{5}{12}$
12) $-\frac{5}{12}x = -\frac{7}{18}$

7. Решите уравнения:

1) $\frac{2}{3}x = \frac{4}{7}$
2) $\frac{5}{8}x = \frac{10}{13}$
3) $\frac{7}{12}x = \frac{14}{19}$
4) $\frac{11}{15}x = \frac{22}{27}$
5) $\frac{13}{18}x = \frac{26}{31}$
6) $\frac{17}{20}x = \frac{34}{37}$
7) $\frac{3}{5}x = \frac{9}{20}$
8) $\frac{4}{7}x = \frac{12}{35}$
9) $\frac{5}{9}x = \frac{15}{36}$
10) $\frac{6}{11}x = \frac{18}{55}$
11) $\frac{7}{13}x = \frac{21}{52}$
12) $\frac{8}{15}x = \frac{24}{75}$

8. Выразите x из уравнения:

1) $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$
2) $\frac{m}{n}x = \frac{p}{q}$
3) $\frac{k}{l}x = \frac{r}{s}$
4) $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$ (выразите через a, b, c, d)
5) $\frac{p}{q}x = \frac{r}{s}$
6) $\frac{u}{v}x = \frac{w}{z}$
7) $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}x$
8) $\frac{r}{s} = \frac{m}{n}x$
9) $\frac{w}{z} = \frac{p}{q}x$
10) $-\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$
11) $\frac{a}{b}x = -\frac{c}{d}$
12) $-\frac{a}{b}x = -\frac{c}{d}$

Уравнения вида $x^2 = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать простейшие квадратные уравнения — такие, где неизвестное возведено в квадрат и равно числу. Пример такого уравнения:

$$x^2 = a$$

Правило решения:
Если $x^2 = a$, то x равен квадратному корню из a, но с двумя знаками:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Это значит, что у такого уравнения обычно два корня: $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$.
Важные случаи:

- Если $a > 0$, то уравнение имеет два корня: $x = \pm\sqrt{a}$.
- Если $a = 0$, то уравнение имеет один корень: $x = 0$.
- Если $a < 0$, то уравнение не имеет решений (квадрат числа не может быть отрицательным).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Когда a — полный квадрат

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^2 = 9$$

Находим квадратный корень из 9: $\sqrt{9} = 3$. Записываем ответ с двумя знаками:

$$x = \pm 3$$

Это значит, что уравнение имеет два корня: $x = 3$ и $x = -3$.
Проверка: $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Пример 2

Когда a — не полный квадрат

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 = 5$$

Квадратный корень из 5 не извлекается нацело, поэтому оставляем его под корнем:

$$x = \pm\sqrt{5}$$

Пример 3

Когда $a = 0$

Возьмём уравнение:

$$x^2 = 0$$

Единственное число, квадрат которого равен нулю — это сам ноль:

$$x = 0$$

Пример 4

Когда a отрицательное

Решим уравнение:

$$x^2 = -4$$

Квадрат любого числа не может быть отрицательным. Поэтому уравнение не имеет решений.
Ответ: корней нет.

Пример 5

Когда перед x^2 стоит коэффициент

Иногда уравнение нужно сначала привести к виду $x^2 = a$. Например:

$$2x^2 = 18$$

Сначала делим обе части на 2:

$$x^2 = 9$$

Теперь решаем как обычно:

$$x = \pm 3$$

Пример 6

Ещё пример с коэффициентом

Рассмотрим уравнение:

$$3x^2 = 12$$

Делим обе части на 3:

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Пример 7

Когда в правой части дробь

Возьмём уравнение:

$$x^2 = \frac{4}{9}$$

Квадратный корень из дроби — это корень из числителя и корень из знаменателя:

$$x = \pm \frac{2}{3}$$

Пример 8

Когда дробь не извлекается

Решим уравнение:

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

Корень из 3 не извлекается, из 4 извлекается. Записываем:

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 9

Когда нужно перенести слагаемое

Бывают уравнения, где сначала нужно собрать всё в одну часть. Например:

$$x^2 + 5 = 9$$

Переносим 5 в правую часть:

$$x^2 = 9 - 5$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Пример 10

Ещё пример с переносом

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 - 7 = 2$$

Переносим -7 в правую часть:

$$x^2 = 2 + 7$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Пример 11

Когда после переноса получается отрицательное число

Решим уравнение:

$$x^2 + 4 = 1$$

Переносим 4 в правую часть:

$$x^2 = 1 - 4$$

$$x^2 = -3$$

Отрицательное число — решений нет.

Пример 12

Когда x в квадрате стоит в скобках

Иногда квадрат спрятан в скобку:

$$(x - 3)^2 = 16$$

Здесь неизвестно не сам x, а выражение $(x - 3)$. Обозначим его за t:

$$t^2 = 16$$

$$t = \pm 4$$

Возвращаемся к x: $x - 3 = 4$ или $x - 3 = -4$.
Из первого уравнения: $x = 7$ Из второго: $x = -1$
Ответ: $x = 7$ или $x = -1$.

Пример 13

Ещё пример со скобкой

Решим уравнение:

$$(2x + 1)^2 = 9$$

Пусть $t = 2x + 1$, тогда $t^2 = 9$, $t = \pm 3$.
Возвращаемся:

$$2x + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$2x + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad 2x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

Ответ: $x = 1$ или $x = -2$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x^2 = 4$	**3)** $x^2 = 16$	**5)** $x^2 = 36$	**7)** $x^2 = 64$
2) $x^2 = 9$	**4)** $x^2 = 25$	**6)** $x^2 = 49$	**8)** $x^2 = 81$

9) $x^2 = 100$

10) $x^2 = 121$

11) $x^2 = 144$

12) $x^2 = 169$

2. Решите уравнения:

1) $x^2 = 2$

2) $x^2 = 3$

3) $x^2 = 5$

4) $x^2 = 6$

5) $x^2 = 7$

6) $x^2 = 8$

7) $x^2 = 10$

8) $x^2 = 11$

9) $x^2 = 12$

10) $x^2 = 13$

11) $x^2 = 14$

12) $x^2 = 15$

3. Решите уравнения:

1) $x^2 = 0$

2) $x^2 = 1$

3) $x^2 = -1$

4) $x^2 = -4$

5) $x^2 = -9$

6) $x^2 = -16$

7) $x^2 = \dfrac{1}{4}$

8) $x^2 = \dfrac{1}{9}$

9) $x^2 = \dfrac{4}{9}$

10) $x^2 = \dfrac{9}{16}$

11) $x^2 = \dfrac{16}{25}$

12) $x^2 = \dfrac{25}{36}$

4. Решите уравнения:

1) $2x^2 = 8$

2) $3x^2 = 12$

3) $4x^2 = 16$

4) $5x^2 = 20$

5) $6x^2 = 24$

6) $7x^2 = 28$

7) $8x^2 = 32$

8) $9x^2 = 36$

9) $10x^2 = 40$

10) $12x^2 = 48$

11) $15x^2 = 60$

12) $20x^2 = 80$

5. Решите уравнения:

1) $2x^2 = 6$

2) $3x^2 = 15$

3) $4x^2 = 20$

4) $5x^2 = 25$

5) $6x^2 = 30$

6) $7x^2 = 35$

7) $8x^2 = 40$

8) $9x^2 = 45$

9) $10x^2 = 50$

10) $12x^2 = 60$

11) $15x^2 = 75$

12) $20x^2 = 100$

6. Решите уравнения:

1) $x^2 + 3 = 7$

2) $x^2 + 5 = 9$

3) $x^2 + 7 = 11$

4) $x^2 - 2 = 8$

5) $x^2 - 4 = 12$

6) $x^2 - 6 = 15$

7) $x^2 + 4 = 2$

8) $x^2 + 6 = 3$

9) $x^2 + 8 = 5$

10) $x^2 - 3 = -1$

11) $x^2 - 5 = -2$

12) $x^2 - 7 = -3$

7. Решите уравнения:

1) $(x-1)^2 = 4$

2) $(x+2)^2 = 9$

3) $(x-3)^2 = 16$

4) $(x+4)^2 = 25$

5) $(x-5)^2 = 36$

6) $(x+6)^2 = 49$

7) $(2x-1)^2 = 9$

8) $(3x+2)^2 = 16$

9) $(4x-3)^2 = 25$

10) $(5x+1)^2 = 36$

11) $(6x-5)^2 = 49$

12) $(7x+4)^2 = 64$

8. Решите уравнения:

1) $2x^2 + 3 = 11$

2) $3x^2 - 4 = 23$

3) $4x^2 + 5 = 21$

4) $5x^2 - 6 = 19$

5) $6x^2 + 7 = 31$

6) $7x^2 - 8 = 41$

7) $8x^2 + 9 = 41$

8) $9x^2 - 10 = 26$

9) $10x^2 + 11 = 51$

10) $(x+1)^2+3=12$

11) $(x-2)^2-5=4$

12) $(2x+3)^2+7=16$

9. Выразите x из уравнения:

1) $x^2=a$

2) $x^2=b^2$

3) $x^2=4a^2$

4) $ax^2=b$

5) $kx^2=m$

6) $px^2=q$

7) $x^2+a=b$

8) $x^2-c=d$

9) $ax^2+b=c$

10) $(x-a)^2=b$

11) $(x+m)^2=n$

12) $(kx+l)^2=m$

Уравнения вида $x^3 = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, где неизвестное возведено в куб. Пример такого уравнения:

$$x^3 = a$$

Правило решения: Если $x^3 = a$, то x равен кубическому корню из a:

$$x = \sqrt[3]{a}$$

В отличие от квадратных уравнений, здесь не появляется два знака. Кубический корень существует для любого числа a (и положительного, и отрицательного), и он всегда единственный.

Важные случаи:

- Если $a > 0$, то $x = \sqrt[3]{a}$ — положительное число.
- Если $a = 0$, то $x = 0$.
- Если $a < 0$, то $x = \sqrt[3]{a}$ — отрицательное число.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Когда a — куб целого числа

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^3 = 8$$

Число 2 в кубе даёт 8, поэтому:

$$x = 2$$

Пример 2

Ещё пример с кубом целого числа

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 = 27$$

Число 3 в кубе даёт 27, значит:

$$x = 3$$

Пример 3

Когда a отрицательное

Возьмём уравнение с отрицательным числом:

$$x^3 = -8$$

Число (-2) в кубе даёт -8, поэтому:

$$x = -2$$

Пример 4

Ещё пример с отрицательным a

Решим уравнение:

$$x^3 = -125$$

Число (-5) в кубе даёт -125, значит:

$$x = -5$$

Пример 5

Когда a — не полный куб

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 = 2$$

Нет целого числа, куб которого равен 2, поэтому оставляем ответ с кубическим корнем:

$$x = \sqrt[3]{2}$$

Пример 6

Ещё пример с неполным кубом

Решим уравнение:

$$x^3 = 10$$

$$x = \sqrt[3]{10}$$

Пример 7

Когда перед x^3 стоит коэффициент

Иногда уравнение нужно сначала привести к виду $x^3 = a$. Например:

$$2x^3 = 16$$

Делим обе части на 2:

$$x^3 = 8$$

Число 2 в кубе даёт 8, значит:

$$x = 2$$

Пример 8

Ещё пример с коэффициентом

Рассмотрим уравнение:

$$3x^3 = 81$$

Делим на 3:

$$x^3 = 27$$

Число 3 в кубе даёт 27, поэтому:

$$x = 3$$

Пример 9

Когда коэффициент и ответ — дробь

Возьмём уравнение:

$$4x^3 = 20$$

Делим на 4:

$$x^3 = 5$$

$$x = \sqrt[3]{5}$$

Пример 10

Когда в правой части дробь

Решим уравнение:

$$x^3 = \frac{8}{27}$$

Число $\frac{2}{3}$ в кубе даёт $\frac{8}{27}$, значит:

$$x = \frac{2}{3}$$

Пример 11

Когда дробь не извлекается

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 = \frac{3}{4}$$

Ни числитель, ни знаменатель не являются полными кубами, поэтому оставляем под корнем:

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

Пример 12

Когда нужно перенести слагаемое

Бывают уравнения, где сначала нужно собрать всё в одну часть. Например:

$$x^3 + 5 = 13$$

Переносим 5 в правую часть:

$$x^3 = 8$$

Число 2 в кубе даёт 8, значит:

$$x = 2$$

Пример 13

Ещё пример с переносом

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 - 7 = 20$$

Переносим -7 в правую часть:

$$x^3 = 27$$

Число 3 в кубе даёт 27, поэтому:

$$x = 3$$

Пример 14

Когда x в кубе стоит в скобках

Иногда куб спрятан в скобку:

$$(x - 2)^3 = 8$$

Здесь неизвестно не сам x, а выражение $(x - 2)$. Обозначим его за t:

$$t^3 = 8$$

Число 2 в кубе даёт 8, значит $t = 2$.
Возвращаемся к x:

$$x - 2 = 2$$

$$x = 4$$

Пример 15

Ещё пример со скобкой

Решим уравнение:

$$(2x+1)^3 = 27$$

Пусть $t = 2x + 1$, тогда $t^3 = 27$. Число 3 в кубе даёт 27, значит $t = 3$.
Возвращаемся:

$$2x + 1 = 3$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Пример 16

Скобка с отрицательным числом

Рассмотрим уравнение:

$$(x+3)^3 = -64$$

Пусть $t = x + 3$, тогда $t^3 = -64$. Число (-4) в кубе даёт -64, значит $t = -4$.
Возвращаемся:

$$x + 3 = -4$$
$$x = -7$$

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x^3 = 1$ **2)** $x^3 = 8$ **3)** $x^3 = 27$ **4)** $x^3 = 64$ **5)** $x^3 = 125$ **6)** $x^3 = 216$ **7)** $x^3 = 343$ **8)** $x^3 = 512$ **9)** $x^3 = 729$ **10)** $x^3 = 1000$ **11)** $x^3 = 1331$ **12)** $x^3 = 1728$

2. Решите уравнения:

1) $x^3 = -1$ **2)** $x^3 = -8$ **3)** $x^3 = -27$ **4)** $x^3 = -64$ **5)** $x^3 = -125$ **6)** $x^3 = -216$ **7)** $x^3 = -343$ **8)** $x^3 = -512$ **9)** $x^3 = -729$ **10)** $x^3 = -1000$ **11)** $x^3 = -1331$ **12)** $x^3 = -1728$

3. Решите уравнения:

1) $x^3 = 2$ **2)** $x^3 = 3$ **3)** $x^3 = 4$ **4)** $x^3 = 5$ **5)** $x^3 = 6$ **6)** $x^3 = 7$ **7)** $x^3 = 9$ **8)** $x^3 = 10$ **9)** $x^3 = 11$ **10)** $x^3 = 12$ **11)** $x^3 = 13$ **12)** $x^3 = 14$

4. Решите уравнения:

1) $x^3 = \frac{1}{8}$ **2)** $x^3 = \frac{1}{27}$ **3)** $x^3 = \frac{8}{27}$ **4)** $x^3 = \frac{27}{64}$ **5)** $x^3 = \frac{64}{125}$ **6)** $x^3 = \frac{125}{216}$ **7)** $x^3 = -\frac{1}{8}$ **8)** $x^3 = -\frac{1}{27}$ **9)** $x^3 = -\frac{8}{27}$ **10)** $x^3 = -\frac{27}{64}$ **11)** $x^3 = -\frac{64}{125}$ **12)** $x^3 = -\frac{125}{216}$

5. Решите уравнения (с коэффициентом):

1) $2x^3 = 16$
2) $3x^3 = 24$
3) $4x^3 = 32$
4) $5x^3 = 40$
5) $6x^3 = 48$
6) $7x^3 = 56$
7) $8x^3 = 64$
8) $9x^3 = 72$
9) $10x^3 = 80$
10) $12x^3 = 96$
11) $15x^3 = 120$
12) $20x^3 = 160$

6. Решите уравнения (с коэффициентом и дробным ответом):

1) $2x^3 = 10$
2) $3x^3 = 15$
3) $4x^3 = 20$
4) $5x^3 = 25$
5) $6x^3 = 30$
6) $7x^3 = 35$
7) $8x^3 = 40$
8) $9x^3 = 45$
9) $10x^3 = 50$
10) $12x^3 = 60$
11) $15x^3 = 75$
12) $20x^3 = 100$

7. Решите уравнения (с переносом слагаемого):

1) $x^3 + 4 = 12$
2) $x^3 + 6 = 14$
3) $x^3 + 8 = 16$
4) $x^3 - 3 = 5$
5) $x^3 - 5 = 22$
6) $x^3 - 7 = 20$
7) $x^3 + 5 = 3$
8) $x^3 + 7 = 0$
9) $x^3 + 9 = 1$
10) $x^3 - 4 = -12$
11) $x^3 - 6 = -14$
12) $x^3 - 8 = -16$

8. Решите уравнения (со скобкой в кубе):

1) $(x-1)^3 = 8$
2) $(x+2)^3 = 27$
3) $(x-3)^3 = 64$
4) $(x+4)^3 = 125$
5) $(x-5)^3 = 216$
6) $(x+6)^3 = 343$
7) $(2x-1)^3 = 27$
8) $(3x+2)^3 = 64$
9) $(4x-3)^3 = 125$
10) $(5x+1)^3 = 216$
11) $(6x-5)^3 = 343$
12) $(7x+4)^3 = 512$

9. Решите уравнения (смешанные):

1) $2x^3 + 5 = 21$
2) $3x^3 - 7 = 20$
3) $4x^3 + 9 = 41$
4) $5x^3 - 11 = 114$
5) $6x^3 + 13 = 31$
6) $7x^3 - 15 = 48$
7) $8x^3 + 17 = 33$
8) $9x^3 - 19 = 26$
9) $10x^3 + 21 = 41$
10) $(x+2)^3 - 5 = 22$
11) $(x-3)^3 + 7 = 34$
12) $(2x-1)^3 - 9 = 18$

10. Выразите x из уравнения:

1) $x^3 = a$
2) $x^3 = b^3$
3) $x^3 = 8a^3$
4) $ax^3 = b$
5) $kx^3 = m$
6) $px^3 = q$
7) $x^3 + a = b$
8) $x^3 - c = d$
9) $ax^3 + b = c$
10) $(x-a)^3 = b$
11) $(x+m)^3 = n$
12) $(kx+l)^3 = m$

Уравнения вида $x^n = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, где неизвестное возведено в любую натуральную степень. Пример такого уравнения:

$$x^n = a$$

Здесь n — натуральное число (1, 2, 3, 4, ...), a — известное число, а x — неизвестное.

Правило решения:

Если $x^n = a$, то x равен корню n-й степени из a:

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Но здесь есть важная тонкость. Количество корней зависит от чётности показателя n и от знака числа a.

Случай 1. ***n* — нечётное число (1, 3, 5, 7, ...)**

В этом случае уравнение имеет ровно один корень для любого a:

$$x = \sqrt[n]{a}$$

При этом: - если $a > 0$, то $x > 0$; - если $a = 0$, то $x = 0$; - если $a < 0$, то $x < 0$.

Случай 2. ***n* — чётное число (2, 4, 6, 8, ...)**

Здесь всё зависит от знака a: - если $a > 0$, то уравнение имеет два корня: $x = \pm\sqrt[n]{a}$; - если $a = 0$, то один корень: $x = 0$; - если $a < 0$, то решений нет (чётная степень не может давать отрицательное число).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Нечётная степень, $a > 0$

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^5 = 32$$

Показатель нечётный (5), значит, один корень. Находим число, которое в пятой степени даёт 32: $2^5 = 32$. Значит:

$$x = 2$$

Пример 2

Нечётная степень, $a < 0$

Рассмотрим уравнение:

$$x^5 = -32$$

Показатель нечётный, отрицательное число в нечётной степени даёт отрицательный результат. $(-2)^5 = -32$, поэтому:

$$x = -2$$

Пример 3

Чётная степень, $a > 0$

Возьмём уравнение:

$$x^4 = 16$$

Показатель чётный (4), $a > 0$, значит, два корня. $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$, поэтому:

$$x = \pm 2$$

Пример 4

Чётная степень, $a < 0$

Решим уравнение:

$$x^4 = -16$$

Чётная степень не может быть отрицательной. Решений нет.

Пример 5

Чётная степень, $a = 0$

Рассмотрим уравнение:

$$x^6 = 0$$

Единственное число, которое в любой степени даёт ноль — это сам ноль:

$$x = 0$$

Пример 6

Нечётная степень, a не является полной степенью

Решим уравнение:

$$x^7 = 10$$

Нет целого числа, которое в седьмой степени даёт 10. Оставляем ответ с корнем:

$$x = \sqrt[7]{10}$$

Пример 7

Чётная степень, a не является полной степенью

Рассмотрим уравнение:

$$x^6 = 5$$

Показатель чётный, $a > 0$, значит, два корня:

$$x = \pm\sqrt[6]{5}$$

Пример 8

Число в правой части записано как степень

Решим уравнение:

$$x^3 = 2^3$$

Показатель нечётный, значит один корень. Так как $2^3 = 8$, можно было бы записать $x = 2$, но лучше заметить, что из равенства степеней с одинаковым показателем следует:

$$x = 2$$

Пример 9

Чётная степень, число записано как степень

Рассмотрим уравнение:

$$x^6 = 3^6$$

Показатель чётный, значит два корня:

$$x = \pm 3$$

Пример 10

Отрицательное число в степени

Решим уравнение:

$$x^5 = (-2)^5$$

Показатель нечётный, значит:

$$x = -2$$

Пример 11

Когда перед x^n стоит коэффициент

Иногда уравнение нужно сначала привести к виду $x^n = a$. Например:

$$3x^4 = 48$$

Делим обе части на 3:

$$x^4 = 16$$

Теперь решаем: показатель чётный, $a > 0$, значит:

$$x = \pm 2$$

Пример 12

Ещё пример с коэффициентом

Рассмотрим уравнение:

$$5x^5 = -40$$

Делим на 5:

$$x^5 = -8$$

Показатель нечётный, $a < 0$, значит, один корень:

$$x = \sqrt[5]{-8} = -2$$

Пример 13

Когда нужно перенести слагаемое

Бывают уравнения, где сначала нужно собрать всё в одну часть. Например:

$$x^5 + 7 = 34$$

Переносим 7 в правую часть:

$$x^5 = 34 - 7$$
$$x^5 = 27$$

Показатель нечётный, значит:

$$x = \sqrt[5]{27}$$

Пример 14

Ещё пример с переносом

Рассмотрим уравнение:

$$x^4 - 5 = 11$$

Переносим -5 в правую часть:

$$x^4 = 11 + 5$$
$$x^4 = 16$$

Показатель чётный, значит:

$$x = \pm 2$$

Пример 15

Дробь в правой части

Решим уравнение:

$$x^4 = \frac{16}{81}$$

Показатель чётный, $a > 0$, значит два корня. Корень четвёртой степени из дроби — это корень из числителя и корень из знаменателя:

$$x = \pm\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \pm\frac{2}{3}$$

Пример 16

Дробь с неполными степенями

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 = \frac{5}{7}$$

Показатель нечётный, один корень:

$$x = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$$

Пример 17

Дробь, записанная через степени

Решим уравнение:

$$x^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

Показатель чётный, значит два корня:

$$x = \pm\frac{2}{3}$$

Пример 18

Сложный случай с коэффициентом и степенью

Рассмотрим уравнение:

$$2x^5 = 2 \cdot 3^5$$

Делим обе части на 2:

$$x^5 = 3^5$$

Показатель нечётный, значит:

$$x = 3$$

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x^2 = 9$	**4)** $x^5 = 32$	**7)** $x^4 = 81$	**10)** $x^3 = 216$
2) $x^3 = 8$	**5)** $x^2 = 25$	**8)** $x^5 = -243$	**11)** $x^4 = -625$
3) $x^4 = 16$	**6)** $x^3 = -64$	**9)** $x^2 = 36$	**12)** $x^6 = 64$

2. Решите уравнения:

1) $x^2 = 2^2$	**4)** $x^5 = 5^5$	**7)** $x^4 = 3^4$	**10)** $x^3 = 2^3$
2) $x^3 = 3^3$	**5)** $x^2 = 6^2$	**8)** $x^5 = (-4)^5$	**11)** $x^4 = (-5)^4$
3) $x^4 = 4^4$	**6)** $x^3 = (-2)^3$	**9)** $x^2 = 7^2$	**12)** $x^6 = 2^6$

3. Решите уравнения:

1) $x^3 = 2$
2) $x^3 = 10$
3) $x^4 = 3$
4) $x^4 = 7$
5) $x^5 = 4$
6) $x^5 = 12$
7) $x^6 = 5$
8) $x^6 = 15$
9) $x^7 = 6$
10) $x^7 = 20$
11) $x^8 = 8$
12) $x^8 = 24$

4. Решите уравнения:

1) $x^2 = \frac{4}{9}$
2) $x^2 = \frac{9}{16}$
3) $x^3 = \frac{8}{27}$
4) $x^3 = \frac{27}{64}$
5) $x^4 = \frac{16}{81}$
6) $x^4 = \frac{81}{256}$
7) $x^2 = \frac{2}{3}$
8) $x^3 = \frac{3}{4}$
9) $x^4 = \frac{5}{7}$
10) $x^5 = \frac{1}{32}$
11) $x^5 = \frac{32}{243}$
12) $x^6 = \frac{64}{729}$

5. Решите уравнения:

1) $2x^3 = 16$
2) $3x^4 = 48$
3) $4x^5 = 128$
4) $5x^2 = 45$
5) $6x^6 = 384$
6) $7x^3 = 56$
7) $8x^4 = 128$
8) $9x^5 = 288$
9) $10x^2 = 90$
10) $12x^3 = 96$
11) $15x^4 = 240$
12) $20x^6 = 1280$

6. Решите уравнения:

1) $x^3 + 5 = 13$
2) $x^4 + 7 = 23$
3) $x^5 - 3 = 29$
4) $x^6 - 4 = 60$
5) $x^3 + 8 = 0$
6) $x^4 + 9 = 10$
7) $x^5 - 6 = -38$
8) $x^6 - 10 = 54$
9) $x^3 + 12 = 15$
10) $x^4 - 15 = 66$
11) $x^5 + 20 = 12$
12) $x^6 - 25 = 39$

7. Решите уравнения:

1) $2x^3 + 7 = 23$
2) $3x^4 - 5 = 76$
3) $4x^5 + 9 = 41$
4) $5x^6 - 11 = 309$
5) $6x^3 + 13 = 31$
6) $7x^4 - 15 = 82$
7) $8x^5 + 17 = 33$
8) $9x^6 - 19 = 710$
9) $10x^3 + 21 = 31$
10) $4x^4 - 7 = 249$
11) $2x^5 + 8 = 40$
12) $3x^6 - 9 = 183$

8. Выразите x из уравнения:

1) $x^n = a$
2) $x^n = b^n$
3) $x^n = c^m$
4) $ax^n = b$
5) $kx^n = m$
6) $px^n = q$
7) $x^n + a = b$
8) $x^n - c = d$
9) $ax^n + b = c$

Произведение равно нулю

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, которые сводятся к произведению множителей с помощью вынесения общего множителя за скобки. Примеры таких уравнений:

$$x^2 + ax = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

Правило решения: В таких уравнениях есть общий множитель — переменная x. Выносим её за скобки и получаем произведение, равное нулю:

$$x(x + a) = 0 \quad \text{или} \quad x(ax + b) = 0$$

Дальше пользуемся правилом из предыдущей главы: произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^2 + 3x = 0$$

Выносим общий множитель x за скобки:

$$x(x + 3) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x + 3 = 0$$

Решаем второе уравнение:

$$x = -3$$

Ответ: $x = 0$ или $x = -3$.

Пример 2

С минусом

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 - 5x = 0$$

Выносим x:

$$x(x - 5) = 0$$

Получаем:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x - 5 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 5$$

Пример 3

Когда коэффициент при x^2 не равен 1

Возьмём уравнение:

$$2x^2 + 6x = 0$$

Выносим общий множитель. Здесь общее не только x, но и число 2:

$$2x(x + 3) = 0$$

Произведение равно нулю. Множитель 2 никогда не равен нулю, поэтому его можно не рассматривать:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = -3$$

Пример 4

Ещё пример с коэффициентом

Решим уравнение:

$$3x^2 - 12x = 0$$

Выносим $3x$:

$$3x(x - 4) = 0$$

$3 \neq 0$, значит:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 4$$

Пример 5

Когда числа не делятся нацело

Рассмотрим уравнение:

$$4x^2 + 6x = 0$$

Выносим общий множитель. У чисел 4 и 6 общий делитель 2, поэтому выносим $2x$:

$$2x(2x + 3) = 0$$

$2 \neq 0$, значит:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 2x + 3 = 0$$

Решаем второе уравнение:

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Ответ: $x = 0$ или $x = -1.5$.

Пример 6

Когда нужно сначала перенести

Бывают уравнения, где слагаемые стоят не в том порядке. Например:

$$x^2 = 4x$$

Сначала переносим всё в левую часть:

$$x^2 - 4x = 0$$

Теперь выносим x:

$$x(x - 4) = 0$$

Получаем:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 4$$

Пример 7

Ещё пример с переносом

Решим уравнение:

$$3x^2 = 9x$$

Переносим:

$$3x^2 - 9x = 0$$

Выносим $3x$:

$$3x(x-3)=0$$

$3\neq 0$, значит:

$$x=0 \quad \text{или} \quad x-3=0$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad x=3$$

Пример 8

Когда после переноса получаются дробные коэффициенты

Рассмотрим уравнение:

$$2x^2=5x$$

Переносим:

$$2x^2-5x=0$$

Выносим x:

$$x(2x-5)=0$$

Получаем:

$$x=0 \quad \text{или} \quad 2x-5=0$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad 2x=5$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad x=\frac{5}{2}=2.5$$

Пример 9

Когда в уравнении только два слагаемых с x

Возьмём уравнение:

$$5x^2+5x=0$$

Выносим $5x$:

$$5x(x+1)=0$$

$5\neq 0$, значит:

$$x=0 \quad \text{или} \quad x+1=0$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad x=-1$$

Пример 10

Когда общий множитель — только x без числа

Рассмотрим уравнение:

$$x^2+x=0$$

Выносим x:

$$x(x+1)=0$$

Получаем:

$$x=0 \quad \text{или} \quad x+1=0$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad x=-1$$

Пример 11

Когда после вынесения получается скобка с минусом

Решим уравнение:

$$x^2-2x=0$$

Выносим x:

$$x(x-2)=0$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad x-2=0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 2$$

Пример 12

Сложный случай с дробями

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$$

Чтобы избежать работы с дробями, умножим обе части на 4:

$$2x^2 + 3x = 0$$

Теперь выносим x:

$$x(2x+3) = 0$$

Получаем:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 2x + 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 2x = -3$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Задачи

1. Решите уравнения ($x^2 + ax = 0$):

1) $x^2 + 2x = 0$ **4)** $x^2 + 5x = 0$ **7)** $x^2 + 8x = 0$ **10)** $x^2 + 12x = 0$

2) $x^2 + 3x = 0$ **5)** $x^2 + 6x = 0$ **8)** $x^2 + 9x = 0$ **11)** $x^2 + 15x = 0$

3) $x^2 + 4x = 0$ **6)** $x^2 + 7x = 0$ **9)** $x^2 + 10x = 0$ **12)** $x^2 + 20x = 0$

2. Решите уравнения ($x^2 - ax = 0$):

1) $x^2 - 2x = 0$ **4)** $x^2 - 5x = 0$ **7)** $x^2 - 8x = 0$ **10)** $x^2 - 12x = 0$

2) $x^2 - 3x = 0$ **5)** $x^2 - 6x = 0$ **8)** $x^2 - 9x = 0$ **11)** $x^2 - 15x = 0$

3) $x^2 - 4x = 0$ **6)** $x^2 - 7x = 0$ **9)** $x^2 - 10x = 0$ **12)** $x^2 - 20x = 0$

3. Решите уравнения ($ax^2 + bx = 0$):

1) $2x^2 + 4x = 0$ **4)** $5x^2 + 10x = 0$ **7)** $8x^2 + 16x = 0$ **10)** $12x^2 + 24x = 0$

2) $3x^2 + 6x = 0$ **5)** $6x^2 + 12x = 0$ **8)** $9x^2 + 18x = 0$ **11)** $15x^2 + 30x = 0$

3) $4x^2 + 8x = 0$ **6)** $7x^2 + 14x = 0$ **9)** $10x^2 + 20x = 0$ **12)** $20x^2 + 40x = 0$

4. Решите уравнения ($ax^2 - bx = 0$):

1) $2x^2 - 4x = 0$ **4)** $5x^2 - 10x = 0$ **7)** $8x^2 - 16x = 0$ **10)** $12x^2 - 24x = 0$

2) $3x^2 - 6x = 0$ **5)** $6x^2 - 12x = 0$ **8)** $9x^2 - 18x = 0$ **11)** $15x^2 - 30x = 0$

3) $4x^2 - 8x = 0$ **6)** $7x^2 - 14x = 0$ **9)** $10x^2 - 20x = 0$ **12)** $20x^2 - 40x = 0$

5. Решите уравнения (с неполным вынесением):

1) $2x^2 + 6x = 0$ **4)** $5x^2 + 15x = 0$ **7)** $8x^2 + 36x = 0$ **10)** $12x^2 + 66x = 0$

2) $3x^2 + 9x = 0$ **5)** $6x^2 + 21x = 0$ **8)** $9x^2 + 45x = 0$ **11)** $15x^2 + 75x = 0$

3) $4x^2 + 10x = 0$ **6)** $7x^2 + 28x = 0$ **9)** $10x^2 + 55x = 0$ **12)** $20x^2 + 90x = 0$

6. Решите уравнения (с переносом):

1) $x^2 = 3x$
2) $x^2 = 5x$
3) $x^2 = 7x$
4) $x^2 = 9x$
5) $2x^2 = 4x$
6) $3x^2 = 6x$
7) $4x^2 = 8x$
8) $5x^2 = 10x$
9) $6x^2 = 12x$
10) $7x^2 = 14x$
11) $8x^2 = 16x$
12) $9x^2 = 18x$

7. Решите уравнения (с дробными ответами):

1) $2x^2 = 5x$
2) $3x^2 = 7x$
3) $4x^2 = 9x$
4) $5x^2 = 12x$
5) $6x^2 = 15x$
6) $7x^2 = 16x$
7) $8x^2 = 18x$
8) $9x^2 = 20x$
9) $10x^2 = 21x$
10) $12x^2 = 25x$
11) $15x^2 = 32x$
12) $20x^2 = 42x$

8. Решите уравнения (смешанные):

1) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = 0$
2) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x = 0$
3) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{8}x = 0$
4) $0.5x^2 + 1.5x = 0$
5) $0.3x^2 - 0.9x = 0$
6) $1.2x^2 + 2.4x = 0$
7) $x^2 + \frac{1}{2}x = 0$
8) $x^2 - \frac{2}{3}x = 0$
9) $2x^2 + \frac{4}{5}x = 0$
10) $3x^2 - \frac{6}{7}x = 0$
11) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x = 0$
12) $\frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{16}x = 0$

9. Выразите x из уравнения (считая, что $x \neq 0$ где нужно):

1) $x^2 + ax = 0$
2) $x^2 - ax = 0$
3) $ax^2 + bx = 0$
4) $ax^2 - bx = 0$
5) $x^2 = ax$
6) $ax^2 = bx$
7) $px^2 + qx = 0$
8) $mx^2 - nx = 0$
9) $kx^2 = lx$
10) $\frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{d}x = 0$
11) $\frac{m}{n}x^2 - \frac{p}{q}x = 0$
12) $\frac{r}{s}x^2 = \frac{t}{u}x$

Неполные квадратные

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, где неизвестное спрятано в скобку, которая возведена в квадрат. Примеры таких уравнений:

$$(x+a)^2 = b$$

$$(ax+b)^2 = c$$

Правило решения: Такие уравнения можно решать двумя способами.

Способ 1. Через квадратный корень Если квадрат выражения равен числу, то само выражение равно либо корню из этого числа, либо минус корню:

$$(x+a)^2 = b \quad \Rightarrow \quad x+a = \pm\sqrt{b}$$

Способ 2. Через замену Обозначаем скобку за новую переменную, решаем получившееся уравнение, потом возвращаемся к исходной переменной.

Какой способ выбрать — дело вкуса. Первый способ короче, второй помогает не запутаться в более сложных случаях.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$(x-2)^2 = 9$$

Способ 1 (через корень):

$$x - 2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Рассматриваем оба случая:

$$x - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

$$x - 2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Ответ: $x = 5$ или $x = -1$.

Способ 2 (через замену): Пусть $t = x - 2$. Тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 = 9$$

$$t = \pm 3$$

Возвращаемся к x:

$$x - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

$$x - 2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Получили те же корни.

Пример 2

С плюсом в скобке

Рассмотрим уравнение:

$$(x+3)^2 = 16$$

Через корень:

$$x + 3 = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$$x + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$x + 3 = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -7$$

Ответ: $x = 1$ или $x = -7$.

Пример 3

Когда b не является полным квадратом

Решим уравнение:

$$(x-5)^2 = 7$$

Через корень:

$$x - 5 = \pm\sqrt{7}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{7}$$

Ответ: $x = 5 + \sqrt{7}$ или $x = 5 - \sqrt{7}$.

Пример 4

Когда перед x в скобке есть коэффициент

Возьмём уравнение:

$$(2x+1)^2 = 9$$

Способ 1 (через корень):

$$2x + 1 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Рассматриваем оба случая:

$$2x + 1 = 3 \quad\Rightarrow\quad 2x = 2 \quad\Rightarrow\quad x = 1$$
$$2x + 1 = -3 \quad\Rightarrow\quad 2x = -4 \quad\Rightarrow\quad x = -2$$

Ответ: $x = 1$ или $x = -2$.

Способ 2 (через замену): Пусть $t = 2x + 1$. Тогда:

$$t^2 = 9$$

$$t = \pm 3$$

Возвращаемся:

$$2x + 1 = 3 \quad\Rightarrow\quad 2x = 2 \quad\Rightarrow\quad x = 1$$
$$2x + 1 = -3 \quad\Rightarrow\quad 2x = -4 \quad\Rightarrow\quad x = -2$$

Пример 5

Ещё пример с коэффициентом

Решим уравнение:

$$(3x-2)^2 = 25$$

Через корень:

$$3x - 2 = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

$$3x - 2 = 5 \quad\Rightarrow\quad 3x = 7 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$
$$3x - 2 = -5 \quad\Rightarrow\quad 3x = -3 \quad\Rightarrow\quad x = -1$$

Ответ: $x = \frac{7}{3}$ или $x = -1$.

Пример 6

Когда b — дробь

Рассмотрим уравнение:

$$(x+4)^2 = \frac{9}{4}$$

Через корень:

$$x + 4 = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

$$x+4=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{2}-4=\frac{3}{2}-\frac{8}{2}=-\frac{5}{2}=-2.5$$
$$x+4=-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}-4=-\frac{3}{2}-\frac{8}{2}=-\frac{11}{2}=-5.5$$

Ответ: $x=-2.5$ или $x=-5.5$.

Пример 7

Когда b отрицательное

Решим уравнение:

$$(x-1)^2=-4$$

Квадрат любого числа не может быть отрицательным. Поэтому уравнение не имеет решений.
Ответ: корней нет.

Пример 8

Когда $b=0$

Рассмотрим уравнение:

$$(2x+5)^2=0$$

Квадрат равен нулю только тогда, когда само выражение равно нулю:

$$2x+5=0$$

$$2x=-5$$
$$x=-\frac{5}{2}=-2.5$$

Ответ: $x=-2.5$ (один корень).

Пример 9

Сложный случай с корнем

Решим уравнение:

$$(4x-3)^2=12$$

Через корень:

$$4x-3=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$$

Рассматриваем оба случая:

$$4x-3=2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 4x=3+2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$$

$$4x-3=-2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 4x=3-2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3-2\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $x=\dfrac{3\pm 2\sqrt{3}}{4}$.

Пример 10

Когда в скобке сумма с минусом

Рассмотрим уравнение:

$$(5-2x)^2=36$$

Через корень:

$$5-2x=\pm\sqrt{36}=\pm 6$$

Рассматриваем оба случая:

$$5-2x=6 \quad \Rightarrow \quad -2x=1 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}=-0.5$$

$$5-2x=-6 \quad \Rightarrow \quad -2x=-11 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{11}{2}=5.5$$

Ответ: $x=-0.5$ или $x=5.5$.

Пример 11

Когда нужно сначала привести к виду $(\ldots)^2 = b$

Иногда уравнение нужно немного преобразовать. Например:

$$(x-3)^2 + 5 = 14$$

Сначала переносим 5 в правую часть:

$$(x-3)^2 = 14 - 5$$

$$(x-3)^2 = 9$$

Теперь решаем как обычно:

$$x - 3 = \pm 3$$

$$x - 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

$$x - 3 = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Ответ: $x = 6$ или $x = 0$.

Пример 12

Ещё пример с приведением

Решим уравнение:

$$(2x+7)^2 - 8 = 1$$

Переносим -8 в правую часть:

$$(2x+7)^2 = 1 + 8$$

$$(2x+7)^2 = 9$$

$$2x + 7 = \pm 3$$

$$2x + 7 = 3 \quad \Rightarrow \quad 2x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

$$2x + 7 = -3 \quad \Rightarrow \quad 2x = -10 \quad \Rightarrow \quad x = -5$$

Ответ: $x = -2$ или $x = -5$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $(x-1)^2 = 4$

2) $(x+2)^2 = 9$

3) $(x-3)^2 = 16$

4) $(x+4)^2 = 25$

5) $(x-5)^2 = -1$

6) $(x+6)^2 = 36$

7) $(x-7)^2 = 49$

8) $(x+8)^2 = -4$

9) $(x-9)^2 = 64$

10) $(x+10)^2 = 81$

11) $(x-11)^2 = -9$

12) $(x+12)^2 = 100$

2. Решите уравнения:

1) $(2x-1)^2 = 9$

2) $(3x+2)^2 = 16$

3) $(4x-3)^2 = 25$

4) $(5x+4)^2 = 36$

5) $(6x-5)^2 = -4$

6) $(7x+6)^2 = 49$

7) $(8x-7)^2 = 64$

8) $(9x+8)^2 = 81$

9) $(10x-9)^2 = 100$

10) $(11x+10)^2 = -16$

11) $(12x-11)^2 = 121$

12) $(13x+12)^2 = 144$

13) $(14x-13)^2 = 2$

14) $(15x+14)^2 = 3$

15) $(16x-15)^2 = 5$

16) $(17x+16)^2 = 6$

17) $(18x-17)^2 = -9$

18) $(19x+18)^2 = 7$

3. Решите уравнения:

1) $(x-2)^2=2$

2) $(x+3)^2=3$

3) $(x-4)^2=5$

4) $(x+5)^2=6$

5) $(x-6)^2=-7$

6) $(x+7)^2=8$

7) $(2x-1)^2=2$

8) $(3x+2)^2=3$

9) $(4x-3)^2=5$

10) $(5x+4)^2=6$

11) $(6x-5)^2=-7$

12) $(7x+6)^2=8$

13) $(8x-7)^2=7$

14) $(9x+8)^2=10$

15) $(10x-9)^2=-11$

16) $(11x+10)^2=12$

17) $(12x-11)^2=13$

18) $(13x+12)^2=14$

4. Решите уравнения:

1) $(x-1)^2=\frac{1}{4}$

2) $(x+2)^2=\frac{4}{9}$

3) $(x-3)^2=\frac{9}{16}$

4) $(x+4)^2=\frac{16}{25}$

5) $(x-5)^2=-\frac{1}{4}$

6) $(2x-1)^2=\frac{1}{9}$

7) $(3x+2)^2=\frac{4}{25}$

8) $(4x-3)^2=\frac{9}{49}$

9) $(5x+4)^2=\frac{16}{81}$

10) $(6x-5)^2=\frac{25}{121}$

11) $(7x+6)^2=-\frac{36}{169}$

12) $(8x-7)^2=\frac{49}{225}$

13) $(9x+8)^2=\frac{64}{289}$

14) $(10x-9)^2=\frac{81}{324}$

15) $(11x+10)^2=-\frac{100}{361}$

5. Решите уравнения:

1) $(x-3)^2=0$

2) $(x+5)^2=0$

3) $(2x-1)^2=0$

4) $(3x+4)^2=0$

5) $(4x-7)^2=0$

6) $(5x+9)^2=0$

7) $(6x-11)^2=0$

8) $(7x+13)^2=0$

9) $(8x-15)^2=0$

10) $(9x+17)^2=0$

11) $(10x-19)^2=0$

12) $(11x+21)^2=0$

6. Решите уравнения:

1) $(x-2)^2+3=7$

2) $(x+3)^2-4=12$

3) $(x-4)^2+5=9$

4) $(x+5)^2-6=10$

5) $(x-6)^2+7=-2$

6) $(2x-1)^2+7=16$

7) $(3x+2)^2-8=17$

8) $(4x-3)^2+9=25$

9) $(5x+4)^2-10=26$

10) $(6x-5)^2+11=-5$

11) $(7x+6)^2-12=37$

12) $(8x-7)^2+13=49$

13) $(9x+8)^2-14=50$

14) $(10x-9)^2+15=-8$

15) $(11x+10)^2-16=33$

7. Решите уравнения:

1) $(x-1)^2=(x-1)^2$

2) $(x+2)^2=(x-2)^2$

3) $(2x-3)^2=(3x-2)^2$

4) $(x^2-4)^2=0$

5) $(x^2+1)^2=4$

6) $(x^2-9)^2=25$

7) $(x^2+1)^2=-4$

8) $((x-1)(x+2))^2=0$

9) $((2x+1)(x-3))^2=9$

10) $((3x-2)(2x+3))^2=16$

11) $((x+2)(x-3))^2=-9$

12) $(x^2+2x+1)^2=9$

13) $(x^2-4x+4)^2=16$

14) $(x^2+6x+9)^2=25$

15) $(x^2+2x+1)^2=-1$

8. Выразите x из уравнения:

1) $(x+a)^2 = b$

2) $(x-a)^2 = b$

3) $(ax+b)^2 = c$

4) $(ax-b)^2 = c$

5) $(px+q)^2 = r$

6) $(mx-n)^2 = p$

7) $(x+a)^2 + b = c$

8) $(x-a)^2 - b = c$

9) $(kx+l)^2 + m = n$

10) $(kx-l)^2 - m = n$

11) $((x+a)(x-b))^2 = 0$

12) $((px+q)(rx-s))^2 = t$

Уравнения со скобкой в квадрате

Теория

В этой главе мы научимся решать полные квадратные уравнения — такие, где есть и x^2, и x, и число. Пример такого уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Здесь a, b, c — известные числа, причём $a \neq 0$, а x — неизвестное.

Что такое дискриминант

Дискриминант — это выражение, которое помогает определить, сколько корней имеет квадратное уравнение. Обозначается буквой D и вычисляется по формуле:

$$D = b^2 - 4ac$$

Формула корней

Если знать дискриминант, то корни уравнения находятся по формуле:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Знак ± означает, что нужно рассмотреть два случая: с плюсом и с минусом.

Как дискриминант влияет на корни

- Если $D > 0$, то $\sqrt{D}$ — число, и формула даёт два разных корня.
- Если $D = 0$, то $\sqrt{D} = 0$, и оба корня совпадают — получается один корень.
- Если $D < 0$, то $\sqrt{D}$ извлечь нельзя (квадратный корень из отрицательного числа не существует). Значит, уравнение не имеет решений.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

$D > 0$, два корня

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Здесь $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

Вычисляем дискриминант:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$D > 0$, значит, будет два корня. Находим их по формуле:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Рассматриваем оба случая:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: $x = 2$ или $x = 3$.

Пример 2

Ещё пример с $D > 0$

Решим уравнение:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$a = 2$, $b = 3$, $c = -5$.

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1$$
$$x_2 = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} = -2.5$$

Ответ: $x = 1$ или $x = -2.5$.

Пример 3

$D = 0$, один корень

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$a = 1$, $b = -6$, $c = 9$.

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$D = 0$, значит, будет один корень (два совпадающих):

$$x = \frac{-(-6) \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 4

Ещё пример с $D = 0$

Решим уравнение:

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$a = 4$, $b = 12$, $c = 9$.

$$D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot 4} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Ответ: $x = -1.5$.

Пример 5

$D < 0$, нет корней

Возьмём уравнение:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

$D < 0$, значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 6

Ещё пример с $D < 0$

Решим уравнение:

$$2x^2 - 3x + 4 = 0$$

$a = 2$, $b = -3$, $c = 4$.

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 = -23$$

$D < 0$, корней нет.

Пример 7

Когда дискриминант — полный квадрат

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$a = 1$, $b = -8$, $c = 12$.

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$$

$\sqrt{D} = 4$ — целое число, поэтому корни будут целыми или рациональными:

$$x = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$
$$x_2 = \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Пример 8

Когда дискриминант — не полный квадрат

Решим уравнение:

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$a = 1$, $b = -5$, $c = 3$.

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 25 - 12 = 13$$

$\sqrt{13}$ не извлекается нацело, поэтому корни будут с корнем:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Пример 9

Отрицательный дискриминант с дробями

Рассмотрим уравнение:

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$a = 3$, $b = 2$, $c = 1$.

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8$$

$D < 0$, корней нет.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$
2) $x^2 - 4x + 3 = 0$
3) $x^2 - 5x + 4 = 0$
4) $x^2 - 6x + 5 = 0$
5) $x^2 + 3x + 2 = 0$
6) $x^2 + 4x + 3 = 0$
7) $x^2 + 5x + 4 = 0$
8) $x^2 + 6x + 5 = 0$
9) $x^2 - 4x - 5 = 0$
10) $x^2 - 5x - 6 = 0$
11) $x^2 + 4x - 5 = 0$
12) $x^2 + 5x - 6 = 0$
13) $x^2 - 2x + 3 = 0$
14) $x^2 - 3x + 4 = 0$
15) $x^2 + 2x + 3 = 0$
16) $x^2 + 3x + 4 = 0$

2. Решите уравнения:

1) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
2) $3x^2 - 7x + 2 = 0$
3) $4x^2 - 9x + 2 = 0$
4) $2x^2 + 5x + 2 = 0$
5) $3x^2 + 7x + 2 = 0$
6) $4x^2 + 9x + 2 = 0$
7) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
8) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
9) $4x^2 - 13x + 3 = 0$
10) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
11) $3x^2 + 10x + 3 = 0$
12) $4x^2 + 13x + 3 = 0$
13) $2x^2 - 2x + 1 = 0$
14) $3x^2 - 3x + 2 = 0$
15) $4x^2 + 4x + 3 = 0$
16) $5x^2 + 5x + 4 = 0$

3. Решите уравнения:

1) $x^2 - 4x + 2 = 0$
2) $x^2 - 4x - 1 = 0$
3) $x^2 - 4x - 2 = 0$
4) $x^2 - 6x + 3 = 0$
5) $x^2 - 6x + 4 = 0$
6) $x^2 - 6x - 1 = 0$
7) $x^2 + 4x + 2 = 0$
8) $x^2 + 4x - 1 = 0$
9) $x^2 + 4x - 2 = 0$
10) $x^2 + 6x + 3 = 0$
11) $x^2 + 6x + 4 = 0$
12) $x^2 + 6x - 1 = 0$
13) $x^2 - 4x + 5 = 0$
14) $x^2 - 6x + 10 = 0$
15) $x^2 + 4x + 6 = 0$
16) $x^2 + 6x + 12 = 0$

4. Решите уравнения:

1) $x^2 - 4x + 4 = 0$
2) $x^2 - 6x + 9 = 0$
3) $x^2 - 8x + 16 = 0$
4) $x^2 + 4x + 4 = 0$
5) $x^2 + 6x + 9 = 0$
6) $x^2 + 8x + 16 = 0$
7) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
8) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
9) $16x^2 - 8x + 1 = 0$
10) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
11) $9x^2 + 6x + 1 = 0$
12) $16x^2 + 8x + 1 = 0$
13) $x^2 - 2x + 1 = 0$
14) $x^2 + 2x + 1 = 0$
15) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
16) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

5. Решите уравнения:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$
2) $x^2 + 7x + 12 = 0$
3) $2x^2 - 7x + 5 = 0$
4) $3x^2 + 5x - 2 = 0$
5) $x^2 - 4x - 7 = 0$
6) $x^2 + 6x + 10 = 0$
7) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
8) $5x^2 - 8x + 3 = 0$
9) $2x^2 + 3x + 4 = 0$
10) $x^2 - 2x - 1 = 0$
11) $3x^2 - 4x - 5 = 0$
12) $4x^2 + 7x + 2 = 0$
13) $x^2 - 8x + 17 = 0$
14) $2x^2 - 5x - 3 = 0$
15) $3x^2 + 2x - 1 = 0$
16) $5x^2 - 6x + 2 = 0$
17) $x^2 + 5x - 3 = 0$
18) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
19) $x^2 - 3x + 5 = 0$
20) $2x^2 + 3x + 5 = 0$
21) $3x^2 - 5x + 4 = 0$
22) $4x^2 + 5x + 3 = 0$
23) $5x^2 - 7x + 4 = 0$
24) $6x^2 + 7x + 5 = 0$

Дискриминант — общая формула

Теория

В этой главе мы научимся решать квадратные уравнения, в которых коэффициент b — чётное число. Для таких уравнений есть более простая формула, которая позволяет вычислять быстрее и с меньшими числами.

Когда применяется эта формула

Если в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент b — чётное число, то удобно ввести новое обозначение:

$$k = \frac{b}{2}$$

Тогда формула дискриминанта упрощается.

Формула дискриминанта для чётного b

Вместо обычного дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ мы используем:

$$D_1 = k^2 - ac$$

(иногда этот дискриминант обозначают $D/4$ или D_1)

Формула корней

Если знаем D_1, то корни находятся по формуле:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

Обратите внимание: в знаменателе просто a, а не $2a$, и в числителе $-k$, а не $-b$.

Как и в обычном случае:

- Если $D_1 > 0$, то два разных корня.
- Если $D_1 = 0$, то один корень.
- Если $D_1 < 0$, то нет корней.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

b чётное, $D_1 > 0$

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Здесь $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$. b чётное, находим k:

$$k = \frac{b}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Вычисляем D_1:

$$D_1 = k^2 - ac = (-3)^2 - 1 \cdot 8 = 9 - 8 = 1$$

$D_1 > 0$, значит, два корня:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{1} = \frac{3 \pm 1}{1}$$

$$x_1 = 3 + 1 = 4$$

$$x_2 = 3 - 1 = 2$$

Ответ: $x = 2$ или $x = 4$.

Пример 2

Сравнение с обычной формулой

Решим уравнение:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$b = -8$, чётное. $k = \frac{-8}{2} = -4$.

$$D_1 = (-4)^2 - 1 \cdot 15 = 16 - 15 = 1$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{1}}{1} = 4 \pm 1$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3$$

Для сравнения, обычный дискриминант: $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, $\sqrt{D} = 2$, и формула $x = \frac{8 \pm 2}{2}$ даёт те же корни. Но с числами работать пришлось с большими.

Пример 3

Когда $a \neq 1$

Рассмотрим уравнение:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$a = 2$, $b = -8$, $c = 6$. b чётное, $k = \frac{-8}{2} = -4$.

$$D_1 = k^2 - ac = (-4)^2 - 2 \cdot 6 = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{D_1} = 2$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-4) \pm 2}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ответ: $x = 1$ или $x = 3$.

Пример 4

$D_1 = 0$

Решим уравнение:

$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$a = 3$, $b = -12$, $c = 12$. $k = \frac{-12}{2} = -6$.

$$D_1 = (-6)^2 - 3 \cdot 12 = 36 - 36 = 0$$

$$x = \frac{-k}{a} = \frac{-(-6)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 5

$D_1 < 0$

Рассмотрим уравнение:

$$5x^2 - 10x + 7 = 0$$

$a = 5$, $b = -10$, $c = 7$. $k = \frac{-10}{2} = -5$.

$$D_1 = (-5)^2 - 5 \cdot 7 = 25 - 35 = -10$$

$D_1 < 0$, значит, корней нет.

Пример 6

b положительное чётное

Решим уравнение:

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$a = 1$, $b = 8$, $c = 12$. $k = \frac{8}{2} = 4$.

$$D_1 = 4^2 - 1 \cdot 12 = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{D_1} = 2$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{1} = -4 \pm 2$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -6$$

Ответ: $x = -6$ или $x = -2$.

Пример 7

Когда корни иррациональные

Рассмотрим уравнение:

$$2x^2 - 8x + 5 = 0$$

$a = 2$, $b = -8$, $c = 5$. $k = \frac{-8}{2} = -4$.

$$D_1 = (-4)^2 - 2 \cdot 5 = 16 - 10 = 6$$

$$\sqrt{D_1} = \sqrt{6}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$$

Ответ: $x = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$.

Пример 8

Когда a отрицательное

Решим уравнение:

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0$$

$a = -3$, $b = 12$, $c = -9$. $k = \frac{12}{2} = 6$.

$$D_1 = 6^2 - (-3) \cdot (-9) = 36 - 27 = 9$$

$$\sqrt{D_1} = 3$$

$$x = \frac{-6 \pm 3}{-3}$$

Рассматриваем оба случая:

$$x_1 = \frac{-6 + 3}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$
$$x_2 = \frac{-6 - 3}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Ответ: $x = 1$ или $x = 3$.

Пример 9

Сравнение с обычной формулой для больших чисел

Иногда формула для чётного b позволяет избежать работы с большими числами. Например:

$$7x^2 - 14x + 5 = 0$$

$k = \frac{-14}{2} = -7.$

$$D_1 = (-7)^2 - 7 \cdot 5 = 49 - 35 = 14$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{14}}{7}$$

По обычной формуле пришлось бы считать $D = (-14)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 5 = 196 - 140 = 56$, $\sqrt{D} = 2\sqrt{14}$, и $x = \frac{14 \pm 2\sqrt{14}}{14} = \frac{7 \pm \sqrt{14}}{7}$ — тот же результат, но с большими числами.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$
2) $x^2 - 6x + 8 = 0$
3) $x^2 - 8x + 15 = 0$
4) $x^2 + 4x + 3 = 0$
5) $x^2 + 6x + 8 = 0$
6) $x^2 + 8x + 15 = 0$
7) $x^2 - 4x - 5 = 0$
8) $x^2 - 6x - 7 = 0$
9) $x^2 + 4x - 5 = 0$
10) $x^2 + 6x - 7 = 0$
11) $x^2 - 2x + 5 = 0$
12) $x^2 + 2x + 5 = 0$
13) $x^2 - 4x + 6 = 0$
14) $x^2 + 4x + 6 = 0$
15) $x^2 - 8x + 17 = 0$
16) $x^2 + 8x + 17 = 0$

2. Решите уравнения:

1) $2x^2 - 4x + 2 = 0$
2) $3x^2 - 6x + 3 = 0$
3) $4x^2 - 8x + 4 = 0$
4) $2x^2 + 4x + 2 = 0$
5) $3x^2 + 6x + 3 = 0$
6) $4x^2 + 8x + 4 = 0$
7) $2x^2 - 4x - 6 = 0$
8) $3x^2 - 6x - 9 = 0$
9) $4x^2 - 8x - 12 = 0$
10) $2x^2 + 4x - 6 = 0$
11) $3x^2 + 6x - 9 = 0$
12) $4x^2 + 8x - 12 = 0$
13) $2x^2 - 4x + 3 = 0$
14) $3x^2 - 6x + 4 = 0$
15) $4x^2 - 8x + 5 = 0$
16) $2x^2 + 4x + 3 = 0$
17) $3x^2 + 6x + 4 = 0$
18) $4x^2 + 8x + 5 = 0$

3. Решите уравнения:

1) $x^2 - 2x - 1 = 0$
2) $x^2 - 4x + 2 = 0$
3) $x^2 - 6x + 7 = 0$
4) $x^2 + 2x - 1 = 0$
5) $x^2 + 4x + 2 = 0$
6) $x^2 + 6x + 7 = 0$
7) $2x^2 - 4x + 1 = 0$
8) $3x^2 - 6x + 2 = 0$
9) $4x^2 - 8x + 3 = 0$
10) $2x^2 + 4x + 1 = 0$
11) $3x^2 + 6x + 2 = 0$
12) $4x^2 + 8x + 3 = 0$
13) $x^2 - 4x - 3 = 0$
14) $x^2 - 6x - 4 = 0$
15) $x^2 + 4x - 3 = 0$
16) $x^2 + 6x - 4 = 0$
17) $2x^2 - 8x + 5 = 0$
18) $2x^2 + 8x + 5 = 0$

4. Решите уравнения:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$
2) $x^2 - 12x + 35 = 0$
3) $x^2 - 14x + 48 = 0$
4) $x^2 + 10x + 24 = 0$
5) $x^2 + 12x + 35 = 0$
6) $x^2 + 14x + 48 = 0$
7) $3x^2 - 12x + 9 = 0$
8) $5x^2 - 20x + 15 = 0$
9) $7x^2 - 28x + 21 = 0$
10) $3x^2 + 12x + 9 = 0$
11) $5x^2 + 20x + 15 = 0$
12) $7x^2 + 28x + 21 = 0$
13) $2x^2 - 8x + 9 = 0$
14) $4x^2 - 16x + 17 = 0$
15) $6x^2 - 24x + 25 = 0$
16) $2x^2 + 8x + 9 = 0$
17) $4x^2 + 16x + 17 = 0$
18) $6x^2 + 24x + 25 = 0$

5. Решите уравнения:

1) $x^2 - 8x + 7 = 0$

2) $x^2 - 10x + 21 = 0$

3) $x^2 - 12x + 32 = 0$

4) $x^2 + 8x + 7 = 0$

5) $x^2 + 10x + 21 = 0$

6) $x^2 + 12x + 32 = 0$

7) $2x^2 - 12x + 10 = 0$

8) $3x^2 - 18x + 24 = 0$

9) $4x^2 - 24x + 36 = 0$

10) $5x^2 - 20x + 4 = 0$

11) $5x^2 - 20x - 1 = 0$

12) $5x^2 - 20x + 6 = 0$

13) $3x^2 + 12x + 5 = 0$

14) $3x^2 + 12x - 2 = 0$

15) $3x^2 + 12x + 7 = 0$

16) $7x^2 - 28x + 3 = 0$

17) $7x^2 - 28x + 5 = 0$

18) $7x^2 - 28x + 8 = 0$

19) $4x^2 + 24x + 35 = 0$

20) $4x^2 + 24x + 37 = 0$

21) $4x^2 + 24x + 40 = 0$

22) $6x^2 - 36x + 55 = 0$

23) $6x^2 - 36x + 54 = 0$

24) $6x^2 - 36x + 53 = 0$

Дискриминант — формула для чётного коэффициента

Теория

В этой главе мы познакомимся с ещё одним способом решения квадратных уравнений — теоремой Виета. Этот способ особенно удобен для уравнений, где первый коэффициент равен единице.

Приведённое квадратное уравнение

Уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0$$

называется приведённым, потому что коэффициент при x^2 равен 1.

Теорема Виета

Если приведённое квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2, то выполняются два равенства:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Другими словами, сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Как пользоваться теоремой Виета

Чтобы решить уравнение $x^2 + px + q = 0$ подбором:

1. Ищем два числа, произведение которых равно q.
2. Проверяем, равна ли их сумма $-p$.
3. Если да — эти числа и есть корни.

Если подобрать не удаётся, значит, корни иррациональные, и нужно использовать дискриминант.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Оба корня положительные

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Здесь $p = -5$, $q = 6$.

Ищем два числа, произведение которых равно 6. Это могут быть 1 и 6, 2 и 3, а также отрицательные варианты.

Проверяем сумму: нам нужно, чтобы сумма была равна $-p = 5$.

Подходят 2 и 3: $2 + 3 = 5$, $2 \cdot 3 = 6$.

Значит, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Пример 2

Корни разных знаков

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$p = -2$, $q = -8$.

Произведение корней равно -8. Значит, корни имеют разные знаки. Возможные пары: 1 и -8, 2 и -4, 4 и -2, 8 и -1.

Сумма должна быть равна $-p = 2$.

Проверяем: $4 + (-2) = 2$, произведение $4 \cdot (-2) = -8$. Подходит.

Значит, $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

Пример 3

Оба корня отрицательные

Решим уравнение:

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$p = 7$, $q = 12$.

Произведение положительное (12), значит, корни одного знака. Сумма отрицательная ($-p = -7$), значит, оба корня отрицательные.

Ищем пары отрицательных чисел, дающих произведение 12: -1 и -12, -2 и -6, -3 и -4.

Проверяем сумму: $-3 + (-4) = -7$. Подходит.

Значит, $x_1 = -3$, $x_2 = -4$.

Пример 4

Один из корней равен 1

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$p = -6$, $q = 5$.

Произведение равно 5. Числа, дающие произведение 5: 1 и 5 (а также -1 и -5, но тогда сумма была бы отрицательной).

Проверяем сумму: $1 + 5 = 6$, а нам нужно 6 (потому что $-p = 6$). Подходит.

Значит, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Пример 5

Корни — одинаковые числа

Решим уравнение:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$p = -4$, $q = 4$.

Произведение равно 4. Какие два одинаковых числа дают произведение 4? 2 и 2 (а также -2 и -2, но тогда сумма была бы -4).

Проверяем сумму: $2 + 2 = 4$, $-p = 4$. Подходит.

Значит, $x_1 = x_2 = 2$.

Пример 6

Когда корни не подбираются

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$p = -4$, $q = 2$.

Ищем пары целых чисел, дающих произведение 2: 1 и 2, -1 и -2.

Проверяем сумму для 1 и 2: $1 + 2 = 3$, а нужно 4. Не подходит. Для -1 и -2: $-1 + (-2) = -3$, тоже не подходит.

Значит, целых корней нет. В таких случаях нужно решать через дискриминант.

Пример 7

Подбор с учётом знаков

Решим уравнение:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$p = 3$, $q = -10$.

Произведение отрицательное, значит, корни разных знаков. Возможные пары: 1 и -10, 2 и -5, 5 и -2, 10 и -1.

Сумма должна быть равна $-p = -3$.

Проверяем: $2 + (-5) = -3$, произведение $2 \cdot (-5) = -10$. Подходит.

Значит, $x_1 = 2$, $x_2 = -5$.

Пример 8

Когда q большое

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 - 15x + 56 = 0$$

$p = -15$, $q = 56$.

Ищем пары чисел, дающих произведение 56: 1 и 56, 2 и 28, 4 и 14, 7 и 8, а также отрицательные варианты.

Сумма должна быть равна 15 (потому что $-p = 15$).

Проверяем: $7 + 8 = 15$, произведение $7 \cdot 8 = 56$. Подходит.

Значит, $x_1 = 7$, $x_2 = 8$.

Пример 9

Когда q отрицательное и большое

Решим уравнение:

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$p = 5$, $q = -24$.

Произведение отрицательное, ищем пары разных знаков. Возможные варианты: 1 и -24, 2 и -12, 3 и -8, 4 и -6, и наоборот (отрицательное первое, положительное второе).

Сумма должна быть равна $-p = -5$.

Проверяем: $3 + (-8) = -5$, произведение $3 \cdot (-8) = -24$. Подходит.

Значит, $x_1 = 3$, $x_2 = -8$.

Пример 10

Когда корни — дроби

Теорему Виета можно применять и для дробных корней, но подбирать сложнее. Например:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

Умножим уравнение на 2, чтобы избавиться от дроби:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Это уже не приведённое уравнение. Такие случаи мы рассмотрим в следующей главе.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$	**6)** $x^2 + 4x + 3 = 0$	**11)** $x^2 + 4x - 5 = 0$	**16)** $x^2 + 8x + 15 = 0$
2) $x^2 - 4x + 3 = 0$	**7)** $x^2 + 5x + 4 = 0$	**12)** $x^2 + 5x - 6 = 0$	**17)** $x^2 - 2x - 15 = 0$
3) $x^2 - 5x + 4 = 0$	**8)** $x^2 + 6x + 5 = 0$	**13)** $x^2 - 7x + 12 = 0$	**18)** $x^2 - 3x - 10 = 0$
4) $x^2 - 6x + 5 = 0$	**9)** $x^2 - 4x - 5 = 0$	**14)** $x^2 - 8x + 15 = 0$	**19)** $x^2 + 2x - 15 = 0$
5) $x^2 + 3x + 2 = 0$	**10)** $x^2 - 5x - 6 = 0$	**15)** $x^2 + 7x + 12 = 0$	**20)** $x^2 + 3x - 10 = 0$

2. Решите уравнения:

1) $x^2 - 9x + 20 = 0$

2) $x^2 - 10x + 21 = 0$

3) $x^2 - 11x + 30 = 0$

4) $x^2 - 12x + 35 = 0$

5) $x^2 + 9x + 20 = 0$

6) $x^2 + 10x + 21 = 0$

7) $x^2 + 11x + 30 = 0$

8) $x^2 + 12x + 35 = 0$

9) $x^2 - 6x - 16 = 0$

10) $x^2 - 7x - 18 = 0$

11) $x^2 - 8x - 20 = 0$

12) $x^2 - 9x - 22 = 0$

13) $x^2 + 6x - 16 = 0$

14) $x^2 + 7x - 18 = 0$

15) $x^2 + 8x - 20 = 0$

16) $x^2 + 9x - 22 = 0$

17) $x^2 - 13x + 42 = 0$

18) $x^2 - 14x + 48 = 0$

19) $x^2 + 13x + 42 = 0$

20) $x^2 + 14x + 48 = 0$

3. Решите уравнения:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

2) $x^2 - 5x + 3 = 0$

3) $x^2 - 5x + 4 = 0$

4) $x^2 - 5x + 5 = 0$

5) $x^2 - 7x + 12 = 0$

6) $x^2 - 7x + 10 = 0$

7) $x^2 - 7x + 8 = 0$

8) $x^2 + 8x + 15 = 0$

9) $x^2 + 8x + 12 = 0$

10) $x^2 + 8x + 10 = 0$

11) $x^2 - 3x - 10 = 0$

12) $x^2 - 3x - 5 = 0$

13) $x^2 - 3x - 4 = 0$

14) $x^2 + 4x - 12 = 0$

15) $x^2 + 4x - 5 = 0$

16) $x^2 + 4x - 2 = 0$

17) $x^2 - 10x + 24 = 0$

18) $x^2 - 10x + 23 = 0$

19) $x^2 - 10x + 21 = 0$

20) $x^2 - 10x + 20 = 0$

21) $x^2 + 9x - 10 = 0$

22) $x^2 + 9x - 5 = 0$

23) $x^2 + 9x - 4 = 0$

24) $x^2 + 9x - 3 = 0$

4. Решите уравнения:

1) $x^2 - 11x + 28 = 0$

2) $x^2 - 11x + 29 = 0$

3) $x^2 - 11x + 30 = 0$

4) $x^2 - 12x + 35 = 0$

5) $x^2 - 12x + 34 = 0$

6) $x^2 - 12x + 36 = 0$

7) $x^2 + 13x + 40 = 0$

8) $x^2 + 13x + 42 = 0$

9) $x^2 + 13x + 41 = 0$

10) $x^2 - 14x + 45 = 0$

11) $x^2 - 14x + 48 = 0$

12) $x^2 - 14x + 49 = 0$

13) $x^2 + 15x + 54 = 0$

14) $x^2 + 15x + 56 = 0$

15) $x^2 + 15x + 55 = 0$

16) $x^2 - 16x + 63 = 0$

17) $x^2 - 16x + 64 = 0$

18) $x^2 - 16x + 60 = 0$

19) $x^2 + 17x + 70 = 0$

20) $x^2 + 17x + 72 = 0$

21) $x^2 + 17x + 71 = 0$

22) $x^2 - 18x + 80 = 0$

23) $x^2 - 18x + 81 = 0$

24) $x^2 - 18x + 79 = 0$

5. Решите уравнения:

1) $x^2 - 19x + 90 = 0$

2) $x^2 - 19x + 88 = 0$

3) $x^2 - 19x + 84 = 0$

4) $x^2 + 20x + 99 = 0$

5) $x^2 + 20x + 100 = 0$

6) $x^2 + 20x + 96 = 0$

7) $x^2 - 21x + 110 = 0$

8) $x^2 - 21x + 108 = 0$

9) $x^2 - 21x + 104 = 0$

10) $x^2 + 22x + 121 = 0$

11) $x^2 + 22x + 120 = 0$

12) $x^2 + 22x + 117 = 0$

13) $x^2 - 23x + 132 = 0$

14) $x^2 - 23x + 130 = 0$

15) $x^2 - 23x + 126 = 0$

16) $x^2 + 24x + 143 = 0$

17) $x^2 + 24x + 144 = 0$

18) $x^2 + 24x + 140 = 0$

19) $x^2 - 25x + 156 = 0$

20) $x^2 - 25x + 154 = 0$

21) $x^2 - 25x + 150 = 0$

22) $x^2 + 26x + 169 = 0$

23) $x^2 + 26x + 168 = 0$

24) $x^2 + 26x + 165 = 0$

6. Для каждого уравнения запишите сумму и произведение корней (не решая уравнения):

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

2) $x^2 + 7x + 12 = 0$

3) $x^2 - 3x - 10 = 0$

4) $x^2 + 4x - 5 = 0$

5) $x^2 - 8x + 15 = 0$

6) $x^2 + 9x + 20 = 0$

7) $x^2 - 2x - 8 = 0$

8) $x^2 + 6x - 7 = 0$

9) $x^2 - 10x + 24 = 0$

10) $x^2 + 11x + 30 = 0$

11) $x^2 - 4x - 12 = 0$

12) $x^2 + 5x - 14 = 0$

13) $x^2 - 12x + 35 = 0$

14) $x^2 + 13x + 42 = 0$

15) $x^2 - 6x - 16 = 0$

16) $x^2 + 7x - 18 = 0$

Теорема Виета для приведённых уравнений

Теория

В этой главе мы научимся применять теорему Виета к уравнениям, где первый коэффициент не равен единице. Такие уравнения называются неприведёнными.

Неприведённое квадратное уравнение

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0$$

где $a \neq 1$, называется неприведённым.

Теорема Виета для неприведённого уравнения

Для любого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (даже если $a \neq 1$) сумма и произведение корней выражаются через коэффициенты:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Это те же формулы, что и для приведённого уравнения, только теперь справа стоят дроби с a.

Алгоритм решения:

1. Находим сумму корней по формуле $S = -\frac{b}{a}$.
2. Находим произведение корней по формуле $P = \frac{c}{a}$.
3. Подбираем два числа, которые дают такую сумму и такое произведение.
4. Если подобрать удаётся — это корни. Если нет — решаем через дискриминант.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

Здесь $a = 2$, $b = -8$, $c = 6$.

Находим сумму и произведение корней:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-8}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

Ищем два числа, сумма которых равна 4, а произведение равно 3. Это 1 и 3 (проверяем: $1 + 3 = 4$, $1 \cdot 3 = 3$).

Значит, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Пример 2

Корни разных знаков

Решим уравнение:

$$3x^2 - 3x - 18 = 0$$

$a = 3$, $b = -3$, $c = -18$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{-3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-18}{3} = -6$$

Произведение отрицательное, значит, корни разных знаков. Ищем два числа, сумма которых 1, а произведение -6.

Подбираем: 3 и -2 дают сумму 1 и произведение -6. Подходит.

Значит, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

Пример 3

Оба корня отрицательные

Рассмотрим уравнение:

$$5x^2 + 25x + 30 = 0$$

$a = 5$, $b = 25$, $c = 30$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{25}{5} = -5$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{30}{5} = 6$$

Сумма отрицательная, произведение положительное — значит, оба корня отрицательные.

Ищем пары отрицательных чисел, дающих произведение 6: -1 и -6, -2 и -3.

Проверяем сумму: $-2 + (-3) = -5$. Подходит.

Значит, $x_1 = -2$, $x_2 = -3$.

Пример 4

Оба корня положительные

Решим уравнение:

$$4x^2 - 12x + 5 = 0$$

$a = 4$, $b = -12$, $c = 5$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{-12}{4} = \frac{12}{4} = 3$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{4} = 1.25$$

Сумма положительная, произведение положительное — значит, оба корня положительные. Но произведение дробное, поэтому целых корней не будет. Здесь теорема Виета для подбора не подходит — нужно решать через дискриминант.

Пример 5

Когда корни — дроби, но подбираются

Иногда корни могут быть дробными, но их всё равно можно подобрать. Например:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$a = 2$, $b = -5$, $c = 2$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Произведение равно 1. Какие два числа дают произведение 1? Это могут быть 1 и 1, 2 и 0.5, и т.д.

Проверяем сумму для 2 и 0.5: $2 + 0.5 = 2.5$. Подходит!

Значит, $x_1 = 2$, $x_2 = 0.5$ (или наоборот).

Пример 6

Когда один корень — целый, другой — дробь

Рассмотрим уравнение:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$a = 3$, $b = -7$, $c = 2$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

Произведение дробное. Подбираем: если один корень целый, например 2, то второй должен быть $\frac{2}{3}$, чтобы произведение было $\frac{2}{3}$? Проверим: $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, не подходит.

Если взять 1, то второй должен быть $\frac{2}{3}$: $1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ — произведение совпадает. Проверяем сумму: $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, а нужно $\frac{7}{3}$ — не подходит.

Если взять 2, то второй $\frac{1}{3}$: $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ — произведение совпадает. Сумма: $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ — подходит!

Значит, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Пример 7

Когда корни не подбираются

Решим уравнение:

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$a = 2$, $b = -4$, $c = 1$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

Пытаемся подобрать: нужны два числа с суммой 2 и произведением 0.5. Целых вариантов нет. Пробуем дроби: 1.5 и 0.5 дают сумму 2, но произведение 0.75 — не подходит. 1.2 и 0.8 — произведение 0.96. Подобрать точно не удаётся.

Значит, корни иррациональные, нужно решать через дискриминант.

Пример 8

Отрицательные коэффициенты

Рассмотрим уравнение:

$$-2x^2 + 6x - 4 = 0$$

$a = -2$, $b = 6$, $c = -4$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{6}{-2} = 3$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ищем два числа с суммой 3 и произведением 2. Это 1 и 2.

Значит, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Обратите внимание: знаки коэффициентов не влияют на подбор — работаем с полученными числами S и P.

Пример 9

Когда a, b, c имеют общий делитель

Иногда можно упростить уравнение, разделив на общий делитель, но это не обязательно. Например:

$$6x^2 - 18x + 12 = 0$$

Можно разделить на 6 и получить $x^2 - 3x + 2 = 0$, но можно и сразу по формулам:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-18}{6} = 3$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{12}{6} = 2$$

Корни: 1 и 2.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $2x^2 - 8x + 6 = 0$ **5)** $2x^2 + 8x + 6 = 0$ **9)** $2x^2 - 4x - 6 = 0$ **13)** $3x^2 + 6x - 9 = 0$

2) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ **6)** $3x^2 + 9x + 6 = 0$ **10)** $3x^2 - 6x - 9 = 0$ **14)** $4x^2 + 8x - 12 = 0$

3) $4x^2 - 12x + 8 = 0$ **7)** $4x^2 + 12x + 8 = 0$ **11)** $4x^2 - 8x - 12 = 0$ **15)** $6x^2 - 18x + 12 = 0$

4) $5x^2 - 15x + 10 = 0$ **8)** $5x^2 + 15x + 10 = 0$ **12)** $2x^2 + 4x - 6 = 0$ **16)** $6x^2 + 18x + 12 = 0$

2. Решите уравнения:

1) $2x^2 - 10x + 12 = 0$ **6)** $3x^2 + 15x + 18 = 0$ **11)** $4x^2 - 12x - 40 = 0$ **16)** $6x^2 + 30x + 36 = 0$

2) $3x^2 - 15x + 18 = 0$ **7)** $4x^2 + 20x + 24 = 0$ **12)** $2x^2 + 6x - 20 = 0$ **17)** $8x^2 - 32x + 24 = 0$

3) $4x^2 - 20x + 24 = 0$ **8)** $5x^2 + 25x + 30 = 0$ **13)** $3x^2 + 9x - 30 = 0$ **18)** $8x^2 + 32x + 24 = 0$

4) $5x^2 - 25x + 30 = 0$ **9)** $2x^2 - 6x - 20 = 0$ **14)** $4x^2 + 12x - 40 = 0$

5) $2x^2 + 10x + 12 = 0$ **10)** $3x^2 - 9x - 30 = 0$ **15)** $6x^2 - 30x + 36 = 0$

3. Решите уравнения:

1) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ **9)** $3x^2 + 7x + 2 = 0$ **17)** $4x^2 - 13x + 3 = 0$

2) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ **10)** $3x^2 + 7x + 4 = 0$ **18)** $4x^2 - 13x + 5 = 0$

3) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ **11)** $4x^2 + 9x + 2 = 0$ **19)** $2x^2 + 7x + 3 = 0$

4) $3x^2 - 7x + 3 = 0$ **12)** $4x^2 + 9x + 5 = 0$ **20)** $2x^2 + 7x + 5 = 0$

5) $4x^2 - 9x + 2 = 0$ **13)** $2x^2 - 7x + 3 = 0$ **21)** $3x^2 + 10x + 3 = 0$

6) $4x^2 - 9x + 4 = 0$ **14)** $2x^2 - 7x + 4 = 0$ **22)** $3x^2 + 10x + 6 = 0$

7) $2x^2 + 5x + 2 = 0$ **15)** $3x^2 - 10x + 3 = 0$ **23)** $4x^2 + 13x + 3 = 0$

8) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ **16)** $3x^2 - 10x + 4 = 0$ **24)** $4x^2 + 13x + 7 = 0$

4. Решите уравнения:

1) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ **8)** $4x^2 - 5x - 4 = 0$ **15)** $2x^2 + 3x - 4 = 0$

2) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ **9)** $4x^2 - 5x - 3 = 0$ **16)** $3x^2 + 4x - 7 = 0$

3) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ **10)** $5x^2 - 6x - 8 = 0$ **17)** $3x^2 + 4x - 4 = 0$

4) $3x^2 - 4x - 7 = 0$ **11)** $5x^2 - 6x - 5 = 0$ **18)** $3x^2 + 4x - 5 = 0$

5) $3x^2 - 4x - 4 = 0$ **12)** $5x^2 - 6x - 4 = 0$ **19)** $4x^2 + 5x - 6 = 0$

6) $3x^2 - 4x - 5 = 0$ **13)** $2x^2 + 3x - 5 = 0$ **20)** $4x^2 + 5x - 4 = 0$

7) $4x^2 - 5x - 6 = 0$ **14)** $2x^2 + 3x - 2 = 0$ **21)** $4x^2 + 5x - 3 = 0$

22) $5x^2 + 6x - 8 = 0$ **23)** $5x^2 + 6x - 5 = 0$ **24)** $5x^2 + 6x - 4 = 0$

5. Решите уравнения:

1) $6x^2 - 13x + 6 = 0$
2) $6x^2 - 13x + 5 = 0$
3) $6x^2 - 13x + 7 = 0$
4) $8x^2 - 14x + 3 = 0$
5) $8x^2 - 14x + 5 = 0$
6) $8x^2 - 14x + 4 = 0$
7) $9x^2 - 15x + 4 = 0$
8) $9x^2 - 15x + 6 = 0$
9) $9x^2 - 15x + 5 = 0$
10) $10x^2 - 21x + 8 = 0$
11) $10x^2 - 21x + 9 = 0$
12) $10x^2 - 21x + 10 = 0$
13) $12x^2 - 23x + 10 = 0$
14) $12x^2 - 23x + 11 = 0$
15) $12x^2 - 23x + 9 = 0$
16) $6x^2 + 13x + 6 = 0$
17) $6x^2 + 13x + 5 = 0$
18) $6x^2 + 13x + 7 = 0$
19) $8x^2 + 14x + 3 = 0$
20) $8x^2 + 14x + 5 = 0$
21) $8x^2 + 14x + 4 = 0$
22) $9x^2 + 15x + 4 = 0$
23) $9x^2 + 15x + 6 = 0$
24) $9x^2 + 15x + 5 = 0$

6. Для каждого уравнения запишите сумму и произведение корней (не решая уравнения):

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
2) $3x^2 + 7x - 2 = 0$
3) $4x^2 - 9x - 5 = 0$
4) $5x^2 + 8x + 2 = 0$
5) $6x^2 - 11x + 4 = 0$
6) $7x^2 + 10x - 3 = 0$
7) $8x^2 - 15x - 7 = 0$
8) $9x^2 + 14x + 5 = 0$
9) $10x^2 - 19x + 6 = 0$
10) $12x^2 + 17x - 5 = 0$
11) $15x^2 - 22x + 8 = 0$
12) $20x^2 + 21x - 9 = 0$
13) $2x^2 + 5x - 3 = 0$
14) $3x^2 - 7x + 2 = 0$
15) $4x^2 + 9x + 5 = 0$
16) $5x^2 - 8x - 2 = 0$

Теорема Виета для неприведённых уравнений

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения четвёртой степени, которые сводятся к квадратным. Такие уравнения называются биквадратными.

Что такое биквадратное уравнение

Биквадратным называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

где $a \neq 0$, а x встречается только в чётных степенях: x^4 и x^2.

Метод решения: замена переменной

Такие уравнения решаются с помощью замены:

$$t = x^2$$

Тогда $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, и уравнение превращается в квадратное относительно t:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Алгоритм решения:

1. Делаем замену $t = x^2$ (обязательно помним, что $t \geq 0$).
2. Решаем полученное квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
3. Для каждого найденного корня t:
   - Если $t > 0$, то $x = \pm\sqrt{t}$ (два корня).
   - Если $t = 0$, то $x = 0$ (один корень).
   - Если $t < 0$, то корней нет (квадрат числа не может быть отрицательным).
4. Собираем все полученные корни.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Делаем замену $t = x^2$, тогда $x^4 = t^2$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

$$\sqrt{D} = 3$$
$$t_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$t_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Оба корня положительные. Возвращаемся к x:
Для $t = 1$: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ Для $t = 4$: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
Ответ: $x = -2,\ -1,\ 1,\ 2.$

Пример 2

Когда один из t отрицательный

Решим уравнение:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$$
$$\sqrt{D} = 5$$
$$t_1 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$
$$t_2 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$t_1 = -1$ — отрицательное, значит, для него корней нет. $t_2 = 4$ — положительное: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
Ответ: $x = -2,\ 2$.

Пример 3

Когда один корень $t = 0$

Рассмотрим уравнение:

$$x^4 - 9x^2 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 9t = 0$$
$$t(t-9) = 0$$
$$t_1 = 0, \quad t_2 = 9$$

Для $t = 0$: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ Для $t = 9$: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
Ответ: $x = -3,\ 0,\ 3$.

Пример 4

Когда дискриминант равен нулю

Решим уравнение:

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$
$$(t-3)^2 = 0$$
$$t = 3$$

$t = 3$ — положительное: $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.
Ответ: $x = -\sqrt{3},\ \sqrt{3}$.

Пример 5

Когда первый коэффициент не равен 1

Рассмотрим уравнение:

$$2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$
$$\sqrt{D} = 3$$
$$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$t_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Оба корня положительные: Для $t = \frac{1}{2}$: $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ Для $t = 2$: $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Ответ: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \pm\sqrt{2}$.

Пример 6

Когда уравнение неполное (нет bx^2)

Решим уравнение:

$$x^4 - 16 = 0$$

Можно решить как биквадратное (здесь $b = 0$): Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 16 = 0$$

$$t^2 = 16$$

$$t = \pm 4$$

$t = -4$ не подходит (отрицательное). $t = 4$ даёт $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Ответ: $x = -2, \ 2$.

Пример 7

Другой способ — сразу как $x^4 = a$

То же уравнение $x^4 - 16 = 0$ можно решить иначе:

$$x^4 = 16$$

$$x^2 = \pm 4$$

Но $x^2 = -4$ решений не даёт, а $x^2 = 4$ даёт $x = \pm 2$.

Оба способа равноправны.

Пример 8

Когда все t отрицательные

Решим уравнение:

$$x^4 + 5x^2 + 6 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 + 5t + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$t_1 = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$t_2 = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Оба корня отрицательные. Значит, исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 9

Когда есть только чётные степени с коэффициентами

Рассмотрим уравнение:

$$3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$3t^2 + 10t + 3 = 0$$

$$D = 100 - 36 = 64$$

$$\sqrt{D} = 8$$

$$t_1 = \frac{-10 - 8}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$t_2 = \frac{-10 + 8}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Оба корня отрицательные — решений нет.

Пример 10

Когда после замены получается один корень

Решим уравнение:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t-1)^2 = 0$$
$$t = 1$$

$t = 1$ даёт $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.
Ответ: $x = -1,\ 1$.

Пример 11

Когда нужно сначала привести к стандартному виду

Иногда уравнение нужно немного преобразовать. Например:

$$x^4 - 3x^2 = -2$$

Переносим всё в левую часть:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

Теперь решаем как обычно:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$t_1 = 1,\ t_2 = 2$$
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Пример 12

Ещё пример с приведением

Рассмотрим уравнение:

$$2x^4 = 8x^2$$

Переносим:

$$2x^4 - 8x^2 = 0$$
$$2x^2(x^2 - 4) = 0$$

Отсюда:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Ответ: $x = -2,\ 0,\ 2$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

2) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

3) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

4) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

5) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

6) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

7) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

8) $x^4 + 17x^2 + 16 = 0$

9) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

10) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

11) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

12) $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$

13) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

14) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

15) $x^4 + 4x^2 - 12 = 0$

16) $x^4 + 5x^2 - 14 = 0$

17) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

18) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

19) $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$

20) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

2. Решите уравнения:

1) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$
2) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$
3) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$
4) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$
5) $3x^4 + 7x^2 + 2 = 0$
6) $4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$
7) $2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$
8) $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$
9) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$
10) $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$
11) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$
12) $4x^4 + 13x^2 + 3 = 0$
13) $2x^4 - 3x^2 - 5 = 0$
14) $3x^4 - 4x^2 - 7 = 0$
15) $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$
16) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$
17) $3x^4 + 4x^2 - 7 = 0$
18) $4x^4 + 5x^2 - 6 = 0$
19) $6x^4 - 13x^2 + 6 = 0$
20) $6x^4 + 13x^2 + 6 = 0$
21) $8x^4 - 14x^2 + 3 = 0$
22) $8x^4 + 14x^2 + 3 = 0$
23) $9x^4 - 15x^2 + 4 = 0$
24) $9x^4 + 15x^2 + 4 = 0$

3. Решите уравнения:

1) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
2) $x^4 - 3x^2 + 3 = 0$
3) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$
4) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$
5) $x^4 + 4x^2 + 5 = 0$
6) $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$
7) $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
8) $2x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
9) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$
10) $3x^4 - 7x^2 + 5 = 0$
11) $3x^4 - 7x^2 + 3 = 0$
12) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$
13) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$
14) $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$
15) $x^4 - 4x^2 + 5 = 0$
16) $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$
17) $2x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
18) $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$
19) $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$
20) $4x^4 - 8x^2 + 4 = 0$
21) $4x^4 - 8x^2 + 5 = 0$
22) $5x^4 + 6x^2 + 2 = 0$
23) $5x^4 + 6x^2 + 1 = 0$
24) $5x^4 + 6x^2 + 3 = 0$

4. Решите уравнения:

1) $x^4 - 4x^2 = 0$
2) $x^4 - 9x^2 = 0$
3) $x^4 - 16x^2 = 0$
4) $x^4 - 25x^2 = 0$
5) $x^4 + 4x^2 = 0$
6) $x^4 + 9x^2 = 0$
7) $x^4 + 16x^2 = 0$
8) $x^4 + 25x^2 = 0$
9) $2x^4 - 8x^2 = 0$
10) $3x^4 - 12x^2 = 0$
11) $4x^4 - 16x^2 = 0$
12) $5x^4 - 20x^2 = 0$
13) $2x^4 + 8x^2 = 0$
14) $3x^4 + 12x^2 = 0$
15) $4x^4 + 16x^2 = 0$
16) $5x^4 + 20x^2 = 0$

5. Решите уравнения:

1) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$
2) $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$
3) $x^4 - 10x^2 + 26 = 0$
4) $x^4 - 12x^2 + 36 = 0$
5) $x^4 - 12x^2 + 35 = 0$
6) $x^4 - 12x^2 + 37 = 0$
7) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$
8) $2x^4 - 9x^2 + 5 = 0$
9) $2x^4 - 9x^2 + 3 = 0$
10) $3x^4 - 10x^2 + 8 = 0$
11) $3x^4 - 10x^2 + 7 = 0$
12) $3x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
13) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
14) $4x^4 - 17x^2 + 5 = 0$
15) $4x^4 - 17x^2 + 3 = 0$
16) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
17) $x^4 - 5x^2 + 5 = 0$
18) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
19) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
20) $x^4 + 5x^2 + 5 = 0$
21) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$
22) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$
23) $2x^4 - 3x^2 - 5 = 0$
24) $2x^4 - 3x^2 - 3 = 0$

6. Решите уравнения:

1) $x^4 - 5x^2 = -4$

2) $x^4 - 6x^2 = -8$

3) $x^4 - 7x^2 = -10$

4) $x^4 - 8x^2 = -15$

5) $2x^4 - 3x^2 = 2$

6) $2x^4 - 5x^2 = 3$

7) $3x^4 - 4x^2 = 4$

8) $3x^4 - 7x^2 = 6$

9) $4x^4 - 5x^2 = 6$

10) $4x^4 - 9x^2 = 4$

11) $x^4 + 5x^2 = 6$

12) $x^4 + 6x^2 = 7$

13) $x^4 + 7x^2 = 8$

14) $x^4 + 8x^2 = 9$

15) $2x^4 + 3x^2 = 5$

16) $2x^4 + 5x^2 = 7$

17) $3x^4 + 4x^2 = 7$

18) $3x^4 + 7x^2 = 10$

19) $4x^4 + 5x^2 = 9$

20) $4x^4 + 9x^2 = 13$

21) $x^4 = 4x^2$

22) $x^4 = 9x^2$

23) $2x^4 = 8x^2$

24) $3x^4 = 12x^2$

Биквадратные уравнения

Теория

Мы изучили много разных видов уравнений:

- линейные уравнения: $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$;
- уравнения со скобками и приведением подобных;
- уравнения с дробными коэффициентами: $\frac{a}{b}x = c$, $ax = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$;
- уравнения со степенями: $x^2 = a$, $x^3 = a$, $x^n = a$;
- уравнения, где произведение равно нулю;
- неполные квадратные уравнения (вынесение общего множителя);
- уравнения со скобкой в квадрате: $(x + a)^2 = b$;
- полные квадратные уравнения (дискриминант, формула для чётного коэффициента);
- теорема Виета для приведённых и неприведённых уравнений;
- биквадратные уравнения.

В этой главе собраны задачи на все эти темы. Они идут вперемешку — от самых простых до более сложных. Ваша задача — посмотреть на уравнение, вспомнить, к какому типу оно относится, и применить нужный способ решения.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x + 5 = 12$ **4)** $2x = 10$ **7)** $12 : x = 4$ **10)** $5 - 2x = 1$

2) $x - 3 = 7$ **5)** $3x = 15$ **8)** $2x + 3 = 11$

3) $8 - x = 5$ **6)** $x : 4 = 5$ **9)** $3x - 4 = 8$

2. Решите уравнения:

1) $2(x + 3) = 12$ **4)** $5 - 2(x + 1) = 3$ **7)** $2(x + 3) + 4(x - 1) = 14$ **10)** $5(x+2)-3(x-1) = 4x+3$

2) $3(x - 2) = 15$ **5)** $3x + 4 = 2x + 10$ **8)** $3(2x - 1) - 2(x + 4) = 7$

3) $4(2x + 1) = 20$ **6)** $5x - 7 = 3x + 5$ **9)** $4x - (x + 3) = 2x + 5$

3. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{2}x = 4$ **4)** $\frac{2}{5}x = \frac{3}{4}$ **7)** $3x = \frac{5}{6}$ **10)** $\frac{2}{3}x = \frac{4}{7}$

2) $\frac{2}{3}x = 6$ **5)** $\frac{3}{7}x = \frac{2}{5}$ **8)** $4x = \frac{2}{3}$

3) $\frac{3}{4}x = 9$ **6)** $2x = \frac{3}{4}$ **9)** $\frac{1}{2}x = \frac{3}{5}$

4. Решите уравнения:

1) $x^2 = 9$ **4)** $x^3 = 8$ **7)** $x^4 = 16$ **10)** $x^5 = -1$

2) $x^2 = 7$ **5)** $x^3 = -27$ **8)** $x^4 = -81$

3) $x^2 = -4$ **6)** $x^3 = 5$ **9)** $x^5 = 32$

5. Решите уравнения:

1) $(x-2)(x-3)=0$
2) $(x+4)(x-5)=0$
3) $(2x-1)(x+3)=0$
4) $x(x-5)=0$
5) $x(2x+3)=0$
6) $(x-1)(x+2)(x-3)=0$
7) $(3x-2)(4x+1)(x-5)=0$
8) $x^2+3x=0$
9) $2x^2-5x=0$
10) $3x^2=6x$

6. Решите уравнения:

1) $(x-1)^2=4$
2) $(x+3)^2=9$
3) $(2x-1)^2=16$
4) $(3x+2)^2=25$
5) $(x-2)^2=3$
6) $(x+4)^2=5$
7) $(x-1)^2=-4$
8) $(2x+3)^2=-9$
9) $(x-2)^2+3=7$
10) $(x+5)^2-4=12$

7. Решите уравнения:

1) $x^2-5x+6=0$
2) $x^2-4x-5=0$
3) $x^2+7x+12=0$
4) $x^2-6x+9=0$
5) $x^2-4x+2=0$
6) $x^2+4x+5=0$
7) $2x^2-5x+2=0$
8) $3x^2-7x+2=0$
9) $4x^2+4x+1=0$
10) $5x^2-8x+3=0$
11) $2x^2+3x-5=0$
12) $3x^2-4x-4=0$

8. Решите уравнения:

1) $x^2-7x+12=0$
2) $x^2-8x+15=0$
3) $x^2+9x+20=0$
4) $x^2-2x-8=0$
5) $x^2+4x-12=0$
6) $2x^2-8x+6=0$
7) $3x^2-9x+6=0$
8) $4x^2-12x+8=0$
9) $2x^2+10x+12=0$
10) $3x^2-6x-9=0$
11) $5x^2-25x+30=0$
12) $6x^2+18x+12=0$

9. Решите уравнения:

1) $x^2-4x+3=0$
2) $x^2-6x+8=0$
3) $x^2+8x+15=0$
4) $2x^2-4x-6=0$
5) $3x^2-6x+3=0$
6) $4x^2+8x-12=0$
7) $5x^2-10x+5=0$
8) $x^2-2x-1=0$
9) $x^2+6x+4=0$
10) $2x^2-8x+5=0$
11) $3x^2+12x+7=0$
12) $4x^2-16x+15=0$

10. Решите уравнения:

1) $x^4-5x^2+4=0$
2) $x^4-10x^2+9=0$
3) $x^4-3x^2-4=0$
4) $x^4+5x^2+4=0$
5) $2x^4-5x^2+2=0$
6) $3x^4-7x^2+2=0$
7) $x^4-9x^2=0$
8) $x^4-4x^2+4=0$
9) $x^4-6x^2+9=0$
10) $x^4-2x^2-3=0$
11) $4x^4-13x^2+3=0$
12) $x^4-8x^2+15=0$

11. Решите уравнения:

1) $(x-3)^2=4x$
2) $(2x+1)^2=3x+2$
3) $x^3-4x=0$
4) $x^4-5x^2+4=0$
5) $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x+1}{4}=2$
6) $\dfrac{2x-1}{5}-\dfrac{x+2}{3}=1$
7) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$
8) $x^4-2x^2-3=0$
9) $(x^2-4)(x^2-9)=0$

10) $(x^2-2x)^2-5(x^2-2x)+6=0$ **11)** $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$ **12)** $x^4-13x^2+36=0$

12. Решите уравнения:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$

2) $(x^2-5x+6)(x^2-7x+10)=0$

3) $x^4-10x^2+9=0$

4) $x^4-4x^2-5=0$

5) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$

6) $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0$

7) $x(x+1)(x+2)(x+3)=0$

8) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$

9) $x^3-3x^2-4x+12=0$

10) $x^3+2x^2-9x-18=0$

11) $x^4-16=0$

12) $x^5-32=0$

Практика на все приёмы

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали большую работу. Поздравляю!

Умение решать уравнения — это как езда на велосипеде. Сначала кажется сложным, непонятно, за что хвататься, какой способ применить. Но чем больше практикуешься, тем увереннее себя чувствуешь. А потом начинаешь замечать, что многие уравнения можно решить разными способами, и это даже интересно — искать самый красивый и короткий путь.

В этой книге мы разобрали все основные виды простых уравнений:

- научились решать линейные уравнения разных типов;
- освоили уравнения со скобками и приведением подобных;
- разобрались с дробными коэффициентами;
- научились решать уравнения со степенями;
- запомнили, как работает правило произведения равного нулю;
- освоили неполные квадратные уравнения;
- научились решать уравнения со скобкой в квадрате;
- разобрались с полными квадратными уравнениями через дискриминант;
- применили теорему Виета;
- дошли до биквадратных уравнений.

Но главное — мы научились определять тип уравнения и выбирать подходящий метод решения. Потому что в реальных примерах редко написано, какой способ применять. Нужно самому посмотреть на уравнение и понять, что делать. И чем больше у вас опыта, тем быстрее вы видите правильный путь.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте books.mrepetitor.com вы найдёте пособия по разным темам школьной математики и физики. Там же есть научно-популярные книги, которые я писал для тех учеников, кому интересно не только решать задачи, но и понимать, как устроен окружающий мир, как развивалась наука и какие люди стояли за великими открытиями.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

Дмитрий Трепачёв